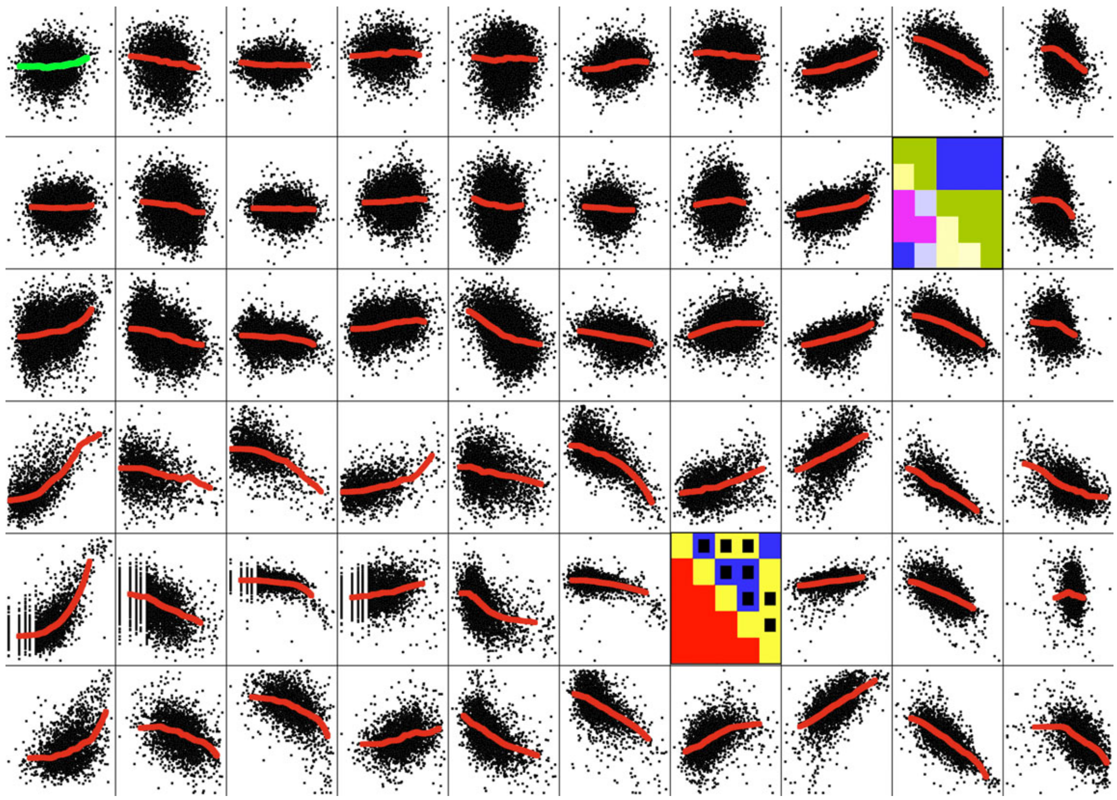
TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

ניתוח נתונים במעבדה א'



אור גראור

תוכן עניינים

מבוא

אנחנו רגילים לקרוא לפיזיקה ״מדע מדויק״, אך לעתים רחוקות אנו תוהים מה בדיוק זה אומר. מה הופך את הפיזיקה שאנו לומדים למדע ״מדויק״, או ״מדויק״ יותר ממדעים אחרים? התשובה עלולה להיראות פשוטה במבט ראשון, ויש להיזהר שלא לזלזל בה: פיזיקה היא מדע מדויק כיוון שאנו יודעים להעריך את דיוק התוצאות שלנו.

בשיעורים התיאורטיים אנו לומדים לפתור משוואות אלגנטיות ולהגיע לתוצאות מוגדרות היטב. אם נשאל, לדוגמה, כמה אנו שוקלים, נדע לומר שהמשקל שלנו נובע מכוח המשיכה בינינו לבין מרכז כדור-הארץ ולרשום: $W = mg = G\dfrac{Mm}{R^2}$. אך מה זה אומר מבחינה מספרית? כמה אנחנו שוקלים והאם אנחנו צריכים לעשות דיאטה? כדי לענות על השאלה ניאלץ לזנוח את המשוואה הסגורה ולהיעזר בכלי מדידה כלשהו – מאזניים, למשל. וכאן, עוד לפני שבכלל התחלנו ללמוד באוניברסיטה, כבר נתקלנו לראשונה במושג השגיאה כשסיפרנו לחברינו שאנחנו שוקלים ״70 ק״ג, פלוס-מינוס״. במעבדה א׳ נלמד להמיר את התשובה הנ״ל לתשובה בסגנון ״70 ק״ג, פלוס-מינוס 2 ק״ג״, ואנו נדע בדיוק איך הגענו להערכה של ״פלוס-מינוס 2 ק״ג״ ומאיפה נובעת האי-ודאות הזאת בתוצאה. אז, ורק אז, נוכל לומר שאנחנו עוסקים במדע מדויק.

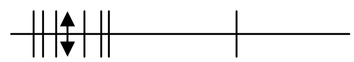
בחוברת שלפניכם תמצאו את המידע הבסיסי הנחוץ לכם לניתוח הנתונים שתאספו בניסויים השונים במסגרת מעבדה א׳. המשוואות וההיגדים השונים שמופיעים במהלך החוברת מובאים ללא הוכחות או פיתוחים מלאים. למי שרוצים להשתכנע באמיתותם, ולמי שרוצים להרחיב את ידיעותיהם בנושאים המגוונים והמרתקים בהם נעסוק, אנו ממליצים בחום לפנות למקורות הבאים:

- Barlow, R. J., Statistics: A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P., Numerical Recipes in C: the art of scientific computation, 2nd Ed.
- Squires, G. L., Practical Physics, 3rd Ed.
- Wall, J. V. and Jenkins, C. R., Practical Statistics for Astronomers

החוברת הזאת היא לשימושכם, ולכן עליה להיות ברורה, מקיפה ושימושית. כדי שנוכל להמשיך ולשפר אותה, אנא הפנו כל בעיה, טענה, דרישה או המלצה לצוות המעבדה. תודה רבה לכל מי שעזר בכתיבת ובבדיקת החוברת: הלינה אברמוביץ׳, גדעון בלע, קובי ברקן, יונתן מונבז וגלעד סבירסקי. עיצוב השער: דן גראור.

1. שגיאות ואי-ודאויות

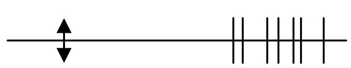
קחו סרגל ומדדו את אורכה של החוברת הזאת. אם תחזרו על המדידה הזאת כמה פעמים תקבלו כל פעם תוצאה קצת שונה. למה? סביר להניח שאורך החוברת לא השתנה בין מדידה למדידה. אז איזו מהתוצאות שקיבלתם היא התוצאה הנכונה? נניח שהתוצאות שלכם, כשמסדרים אותן לאורך קו ישר, מהתוצאה הנמוכה ביותר לגבוהה ביותר, נראות כך:



תרשים 1.1. הדגמה לפיזור מדידות סביב הערך האמיתי כתוצאה מאי-ודאויות אקראיות. הקו עם ראשי החץ מייצג את הערך האמיתי, בעוד שהקווים האחרים מייצגים תוצאות מדידות.

עוד נניח שהאורך האמיתי של החוברת מסומן על-ידי החץ הכפול. המדידות שמפוזרות מסביב לגודל האמיתי נובעות מ**אי-ודאויות** (uncertainties) במדידה שלנו. מה מקורן של אי-ודאויות אלו? יתכן שבכל פעם הצמדנו את הסרגל לחוברת בזווית קצת שונה; או שהיד שלנו רעדה קצת כל פעם והסרגל לא היה יציב; או שבין מדידה למדידה לא הצמדנו את הסרגל בדיוק לקצה החוברת; ועוד ועוד ועוד. נשים לב שהגורמים השונים שהזכרנו הם **אקראיים** – בכל פעם שביצענו את המדידה הם השפיעו עליה בצורה אחרת. עוד נשים לב שאנחנו יכולים להמשיך את הרשימה הזאת (אולי היד שלנו הייתה יציבה כסלע, אבל היו רעידות אדמה קלות מאד שהרעידו את הסרגל; אולי בכל פעם שקראנו את המדידה מהסרגל עשינו זאת מזווית קצת שונה ולכן טעינו בקריאת האורך). לכן, גם אם נדע לזהות ולהתחשב בחלק מהגורמים האקראיים, לעולם לא נוכל להיות בטוחים שזיהינו את כולם. למזלנו, אופיין האקראי של האי-ודאויות האלו מציל אותנו: בקרוב נראה כיצד, בעזרת כלים סטטיסטיים שונים, נוכל להעריך את השפעתם של **כל** הגורמים האקראיים ולהתחשב בה בהתאם.

אבל מה לגבי המדידה הקיצונית מימין? מה מקורה? ובכן, זו כבר שאלה קשה יותר. יתכן שהיא דוגמה קיצונית לשילובם של מספר גורמים אקראיים שביחד הסיטו את התוצאה. אבל יתכן שהיא נובעת מ**שגיאה** (error) שלנו: אולי במדידה האחת הזאת התבלבלנו והשתמשנו באינצ׳ים ולא בסנטימטרים. כל עוד מדובר בשגיאה חד-פעמית, לא יהיה קשה מדי לגלות אותה ולהתחשב בה בהתאם. אבל אם המדידות שלנו נראות כך:



תרשים 1.2. הדגמה לפיזור מדידות סביב ערך שגוי כתוצאה משגיאה שיטתית. גם הפעם הקו עם ראשי החץ מייצג את הערך האמיתי, בעוד שהקווים מייצגים את ערכי המדידות. הפעם כל המדידות שלנו התקבצו הרחק מהערך האמיתי.

כאן עלינו להתמודד עם **שגיאה שיטתית** (systematical error) – שגיאה שמסיטה את כל המדידות שלנו מהערך האמיתי באותה הצורה. שימו לב שהמדידות עדיין מפולגות בצורה אקראית, כי הן עדיין מושפעות מאי-ודאויות אקראיות. השגיאה השיטתית מסוכנת בהרבה מהשגיאה האקראית, כיוון שהיא לא נראית לעין. לולא היינו יודעים את מיקומו של הערך

האמיתי בתרשים הנ"ל, לא היינו חושדים במדידות שלנו, ולא היינו יודעים שתוצאת הניסוי שלנו שגויה. לשגיאה השיטתית שני מקורות עיקריים:

1. מכשירי המדידה: לפני תחילת המדידה יש לכייל את מכשיר המדידה. אם הסרגל שלנו לא מתחיל מאפס, אלא מערך גבוה או נמוך יותר, כל המדידות שלנו יוסטו באותו ערך.
2. בידוד הניסוי. בדרך-כלל נרצה למדוד גודל או תופעה מסוימים. אך העולם הוא מקום מורכב, וקשה מאד לבודד תופעות מסוימות. לכן, כשמתכננים ניסוי, צריך להשתדל ולהתחשב בכל גורם "מזהם". למשל, אם אנו רוצים למדוד תופעה שדורשת טמפרטורה קבועה, נצטרך לוודא שהטמפרטורה בחדר אכן נשארת קבועה. בניסוי שנערך בשעות 08:00-12:00, למשל, נצפה שהטמפרטורה בחדר תעלה במהלך הניסוי.

נגדיר גודל נוסף בו נשתמש במעבדה: **השגיאה היחסית**. אם x הוא גודל כלשהו שאנו מודדים, ו-Δx היא האי-ודאות במדידה שלנו, השגיאה היחסית של המדידה היא:

$$\frac{\Delta x}{x} \tag{1.1}$$

במלים אחרות, השגיאה היחסית היא **דיוק** (accuracy) המדידה. שגיאה יחסית של 10% אומרת שגודל השגיאה הוא עשירית מגודלו של הערך הנמדד (כלומר, 0.1 מגודלו). ככל שנקטין את השגיאה היחסית, כך נגדיל את דיוק המדידה שלנו.

חשוב להבין את ההבדלים הבסיסיים בין סוגי השגיאות שהגדרנו. בעוד שהשגיאה האנושית והשגיאה השיטתית הן אכן שגיאות, היינו טעויות, הרי שהאי-ודאות הנגרמת על-ידי גורמים אקראיים איננה שגיאה – היא איננה טעות שניתן לתקן. האי-ודאות בתוצאות של ניסוי, כל ניסוי, נובעות מאופיו של העולם בו אנו חיים. זהו עולם מורכב ועשיר שבו מגוון של תופעות פיזיקליות שונות משפיעות עלינו בכל רגע נתון. לכן, בעוד שאנחנו יכולים, עם קצת ניסיון והרבה זהירות, להימנע משגיאות, את האי-ודאויות האקראיות לא נוכל למגר. נוכל רק ללמוד כיצד להתחשב בהן וכיצד להבין את המדידות שלנו בהתאם. כדי לעשות זאת נשתמש בכלים שונים מעולם ההסתברות והסטטיסטיקה.

2. הסתברות

כדי לטפל באי-ודאויות האקראיות נצטרך להשתמש בכלים סטטיסטיים, כלים שמבוססים על הסתברות. למונח **הסתברות** (probability) יש מספר הגדרות; אנו נתבסס על ההגדרה של הסתברות שמבוססת על **תדירות** (frequency). בחנו את ההיגד הבא: "הסיכוי לקבל 4 בהטלת קוביה רגילה שווה למספר הפעמים שקיבלנו 4 אם הטלנו את הקוביה אינסוף פעמים." בכתיב מתמטי:

$$P(x)=\frac{n(x)}{N},\ N\to\infty \qquad (2.1)$$

ההסתברות לקבל את התוצאה x היא היחס בין $n(x)$ - מספר הפעמים שקיבלנו x - לבין מספר הפעמים הכולל N, כאשר N שואף לאינסוף. מניסיון יום-יומי אנחנו יודעים שאם נטיל מטבע הרבה פעמים, בערך במחצית מהמקרים נקבל 'עץ' ובשאר המקרים – 'פלי'. אם היינו ממשיכים להטיל את המטבע עד קץ כל הימים, ההנחה למעלה גורסת שהיינו מקבלים 'עץ' בדיוק מחצית מהפעמים.

נחזור לקוביה. אנו יודעים שבכל פעם שנטיל אותה נקבל תוצאה כלשהי. כמו כן, אנחנו יודעים שיש לנו אך ורק שש תוצאות אפשריות: 1, 2, 3, 4, 5 או 6. לכן, ההסתברות לקבלת ערך מסוים x היא חיובית. במלים אחרות, נדרוש שיתקיים $P(x)>0$ ובאופן כללי יותר:

$$P(x)\ge 0 \qquad (2.2)$$

כמו כן, נדרוש שסכום ההסתברויות של כל התוצאות האפשריות יהיה אחד:

$$P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)+P(x=5)+P(x=6)=1 \qquad (2.3)$$

זו דרך מתמטית לומר שיש 100% סיכוי שמשהו יקרה: אם נגלגל את הקוביה נקבל איזושהי תוצאה; אם נטיל מטבע, הוא ייפול על אחד מפניו.

בכתיב מתמטי נוהגים לקצר את הסכום במשוואה העליונה ולכתוב:

$$\sum_{i=1}^{k}P(x_i)=1 \qquad (2.4)$$

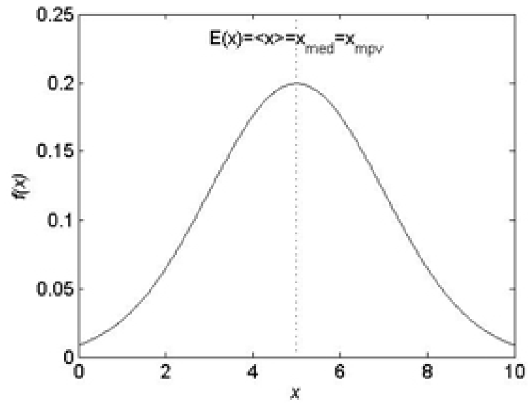
כאשר הסימן $\sum_{i=1}^{k}$ (זו האות היוונית הגדולה סִיגְמָה) מציינת שאנו סוכמים את כל האיברים מהאיבר ה-i עד לאיבר ה-k. במקרה של הקוביה, אנו מתחילים מ-$i=1$ ומסיימים ב-$k=6$.

הדרישה שסכום ההסתברויות תמיד יהיה אחד נחוצה לפיתוחם של חלק מהביטויים שנציין בהמשך. את ההסתברות הבדידה נוכל להכליל בצורה פשוטה לתיאור של הסתברות רציפה:

$$\int_a^b f(x)dx=1 \qquad (2.5)$$

x נקרא "***המשתנה המקרי***" (random variable) והוא יכול לקבל כל ערך בטווח $[a,b]$ בו הוא מוגדר. הפונקציה שמתארת מה ההסתברות לכך שהמשתנה המקרי יקבל את כל אחד מהערכים שהוא יכול לקבל בתוך הטווח היא $f(x)$ והיא נקראת **פונקצית התפלגות ההסתברות**

(probability distribution function). הסימן $\int_a^b$ מציין **אינטגרל** (integral), או סכימה רציפה בין a ל-b.



תרשים 2.1. דוגמה לפונקצית התפלגות הסתברות. הערכים בציר y של הגרף מציינים את ההסתברות לקבל את כל אחד מהערכים בציר x. נשים לב שהפונקציה מוגדרת רק לערכים חיוביים. אם נסכום את ההסתברות בכל נקודה, בעזרת אינטגרל, נמצא שהסכום שווה לאחד, כפי שנובע מההגדרה של פונקצית התפלגות ההסתברות.

במקרה של הקוביה, למשל, המשתנה המקרי x הוא תוצאת הטלת הקוביה, והוא יכול לקבל את כל אחר מהערכים הבדידים בטווח [6 , 1]. הקוביה היא דוגמה קלאסית למקרה של הסתברות בדידה: פונקצית התפלגות ההסתברות שלה היא: $P(x_i)=\frac{1}{6}$, כלומר לתוצאה ה-i (התוצאה הראשונה, השלישית, או כל תוצאה אחרת) יש סיכוי של 1/6.

כדוגמה להתפלגות הסתברות רציפה נדמיין שאנו מודדים את הזמן שלוקח לאצן אולימפי לרוץ 100 מטרים. במקרה זה המשתנה המקרי הוא הזמן שאנו מודדים, ובכל מדידה נקבל תוצאה אחרת מתוך טווח הזמנים הרצוף בין הזמן הטוב ביותר של האצן לבין הזמן הגרוע ביותר שלו.

2.1. התוחלת

התוחלת (expectation value) של משתנה מקרי x מוגדרת כך:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{k} x_i P(x_i) \tag{2.6}$$

ובמקרה של משתנה מקרי רציף:

$$E(x)=\int_a^b xf(x)dx \tag{2.7}$$

אפשר גם להכליל את משוואה (2.6) לחישוב התוחלת של פונקציה של משתנה מקרי:

$$E[g(x)]=\int_a^b g(x)f(x) \tag{2.8}$$

במקרים פרטיים, כמו למשל כאשר פונקצית התפלגות ההסתברות $f(x)$ היא שטוחה, כך שלכל תוצאה אפשרית יש אותה ההסתברות כמו לכל תוצאה אחרת, אז התוחלת לובשת את צורתו של הממוצע החשבוני הפשוט:

$$E(x)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{2.9}$$

פונקצית התפלגות ההסתברויות של הקוביה היא דוגמה טובה:

$$\begin{aligned} E(\text{קוביה}) &= \left(1\times\frac{1}{6}\right)+\left(2\times\frac{1}{6}\right)+\left(3\times\frac{1}{6}\right)+\left(4\times\frac{1}{6}\right)+\left(5\times\frac{1}{6}\right)+\left(6\times\frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 3.5 \end{aligned} \tag{2.10}$$

נדגיש שוב: התוחלת היא הממוצע החשבוני רק במקרים פרטיים. באופן כללי, יש להשתמש בניסוח שמופיע במשוואות (2.6) ו-(2.7).

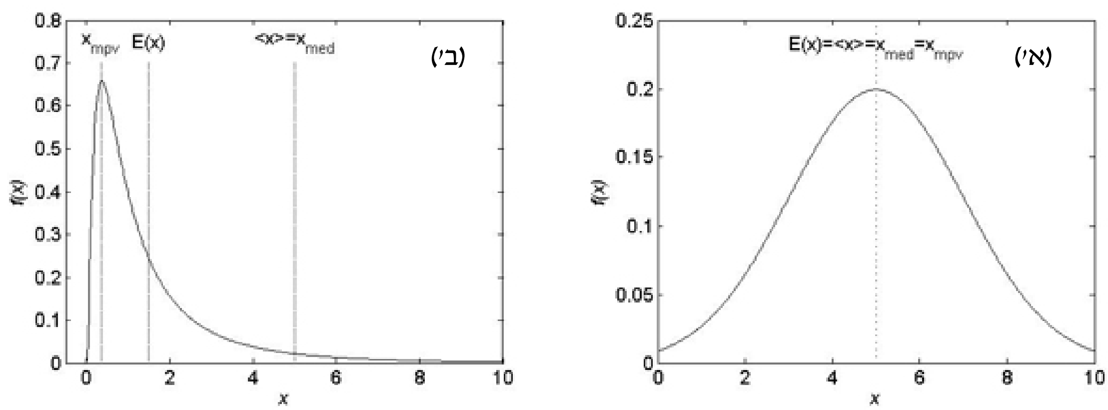
נבדיל בין ה"תוחלת", ה"ממוצע החשבוני", ה"חציון" (median) ו"הערך המסתבר ביותר":

- התוחלת, כפי שראינו, היא ממוצע של תוצאות המשתנה המקרי, משוקללות בהסתברות לקבלת כל תוצאה.
- הממוצע החשבוני הוא פישוט של התוחלת, במקרים פרטיים מסוימים.
- החציון הוא אותו ערך של המשתנה המקרי שמפריד בין מחצית הערכים הנמוכים למחצית הערכים הגבוהים שהמשתנה יכול לקבל.
- הערך המסתבר ביותר, כשמו כן הוא, הוא הערך של המשתנה המקרי בעל ההסתברות הגבוהה ביותר.

נחזור לקוביה שלנו. ראינו שהיא אחד מאותם מקרים פרטיים בהם התוחלת היא הממוצע החשבוני. חישבנו ומצאנו שהיא שווה ל-3.5. כיוון שלקוביה יש מספר זוגי של תוצאות הטלה, אין חציון (אם לקוביה היו שבע פאות, אז אפשר היה לדבר על חציון. התוצאות האפשריות היו 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. במקרה הזה התוצאה 4 מפרידה בין מחצית התוצאות הנמוכות לבין מחצית התוצאות

הגבוהות). בנוסף, אנו רואים מייד שלקוביה אין ״תוצאה מסתברת ביותר״, מהסיבה הפשוטה שלכל תוצאות ההטלה יש את אותה ההסתברות : $P(x)=\frac{1}{6}$.

נדגים את ההבדלים בין המושגים השונים גם עבור התפלגויות רציפות :



תרשים 2.2. בתרשים א׳ מוצגת פונקצית התפלגות הסתברות סימטרית כמקרה פרטי בו התוחלת $E(x)$ זהה לממוצע החשבוני $\langle x\rangle$, לחציון x_{med} ולערך המסתבר ביותר x_{mpv} . בתרשים ב׳ מוצגת פונקצית התפלגות הסתברות כללית יותר, לא סימטרית, בה הגדלים השונים אינם זהים.

2.2. השונות וסטיית התקן

השונות (variance) היא מדד לפיזור התוצאות האפשריות של משתנה מקרי x מסביב לתוחלת שלו, ומוגדרת כך :

$$V(x)=\sum_{i=1}^{k}\left[x_i-E(x)\right]^2 P(x_i) \tag{2.11}$$

או במקרה הרציף :

$$V(x)=\int_a^b\left[x-E(x)\right]^2 f(x)dx \tag{2.12}$$

ניתן לחשב את השונות גם כך :

$$V(x)=E(x^2)-\left[E(x)\right]^2 \tag{2.13}$$

נשים לב שלשונות יש יחידות של תוחלת בריבוע. לכן, כדי לקשר בין שני הגדלים, נגדיר גודל נוסף שיהיה בעל אותן היחידות כמו x : **סטיית התקן** (standard deviation) :

$$\sigma(x)=\sqrt{V(x)} \tag{2.14}$$

2.3. השונות המשותפת והקורלציה

אם שני משתנים מקריים x ו-y מקיימים ביניהם קשר פונקציונלי, היינו כאשר ערכו של x משתנה, ערכו של y משתנה בהתאם, אנו אומרים ששני המשתנים **תלויים** (dependent). אם ערכו של y לא משתנה כאשר ערכו של x משתנה, אנו אומרים ששני המשתנים **בלתי-תלויים** (independent). כדי לבדוק אם המשתנים תלויים אנו מסתמכים על גודל שנקרא **השונות המשותפת** (covariance):

$$Cov(x,y) = E[(x-E(x))(y-E(y))] = E(xy) - E(x)\cdot E(y) \qquad (2.15)$$

כאשר $E(xy)$ הוא התוחלת של המשתנה המקרי החדש שמתקבל מהכפלת x ב-y.

אם שני המשתנים המקריים בלתי-תלויים, מתקיים $E(xy)=E(x)\cdot E(y)$ ולכן $Cov(x,y)=0$.
אבל ההיפך לא תמיד נכון: השונות המשותפת של שני משתנים מקריים יכולה להתאפס, גם אם הם תלויים זה בזה.

נהוג להגדיר גודל נוסף – **הקורלציה** (correlation) – שמבוססת על השונות המשותפת:

$$\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (2.16)$$

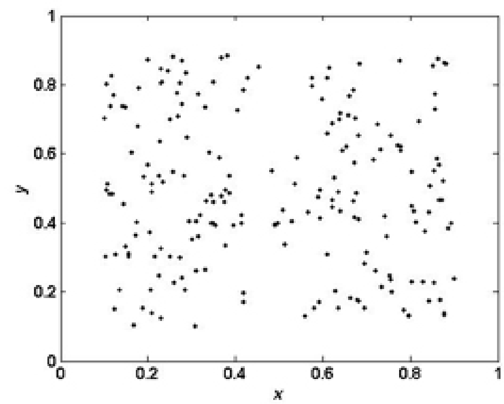
הקורלציה ρ יכולה לקבל כל ערך בטווח $[-1,1]$ והיא חסרת יחידות.

נשים לב שכיוון שהקורלציה נובעת מהשונות המשותפת, הרי שאם המשתנים המקריים x ו-y בלתי-תלויים, הרי שהקורלציה ביניהם תהיה $\rho=0$; אך אם הקורלציה בין שני משתנים מקריים היא $\rho=0$, אי-אפשר להסיק מכך שהם בלתי-תלויים.

ככל שהקורלציה קרובה יותר לערכי הקצה שלה, כך הקשר בין המשתנים הדוק יותר. אם $\rho=1$ אזי גידול בערכו של משתנה אחד גורר גידול בערכו של המשתנה השני. אם $\rho=-1$, אז גידול בערכו של משתנה אחד גורר הקטנה בערכו של המשתנה השני.

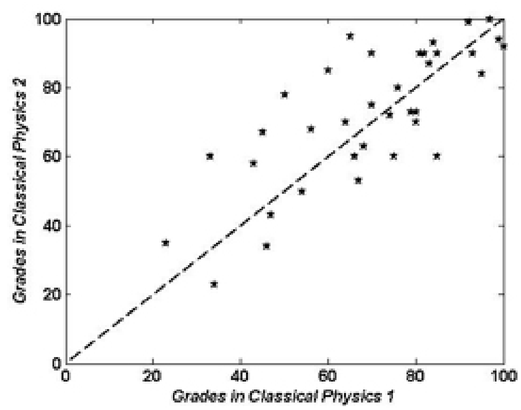
כדוגמה לקורלציה נדמיין את המצב הבא: נסתכל על הציונים במבחן בפיזיקה קלאסית 1 ועל הציונים במבחן בפיזיקה קלאסית 2. האם הציונים בשני המקצועות האלו הינם בלתי-תלויים? ניתן לחשוב שכן – הרי מדובר בשני מבחנים שונים, במקצועות שונים, שנכתבו על-ידי מרצים שונים. אבל קיימת תלות בין שני הקורסים, תלות חזקה מאד: קרוב לוודאי שרוב, אם לא כל הסטודנטים שענו על המבחן הראשון ענו גם על המבחן השני. מכאן שהציונים תלויים: נצפה שמי שיקבל ציון גבוה בקלאסית 1 יקבל ציון גבוה גם בקלאסית 2.

נוח לראות קורלציות בין שני משתנים בעזרת גרפים שנקראים **תרשימי פיזור** (scatter plots). אם אין כל התאמה בין שני המשתנים, הגרף ייראה כמו אוסף נקודות אקראיות:



תרשים 2.3. פיזור הנקודות בגרף אקראי לחלוטין, כך שאין כל קורלציה בין המשתנה שבציר x לבין המשתנה שבציר y.

לעומת זאת, הגרף שמשווה בין הציונים בשני הקורסים ייראה כך:



תרשים 2.4. הכוכבים מייצגים את הציונים שכל סטודנט קיבל בשני הקורסים והקו המקווקו מציין התאמה של 1:1, היינו סטודנטים שקיבלו את אותו הציון בשני המבחנים.

גם ללא הקו המקווקו בתרשים 2.4. ניתן לראות שיש קורלציה בין הציונים בין שני המבחנים, שכן הכוכבים לא מפוזרים באקראי בכל שטח הגרף, אלא מקובצים באזור מאד מסוים. ככל שהקורלציה בין שני משתנים חזקה יותר, כך הנקודות יהיו מקובצות בפס צר יותר. אם הציונים לא היו משתנים כלל בין שני הסמסטרים, כלומר אם הייתה קורלציה מוחלטת בין הציונים, כל הכוכבים היו מסתדרים לאורך הקו המקווקו.

זהירות: אנשים רבים (בעיקר בעיתונות) נוהגים לחשוב שקורלציה שוות ערך לסיבה ותוצאה. בוודאי קראתם שמחקר כלשהו מצא התאמה בין שתיית משקה מוגז כלשהו לבין מחלה ממארת כלשהי, ומכאן שלמי ששותה את אותו המשקה המוגז יש סיכוי גבוה יותר לחלות במחלה הממארת. לא ולא! קורלציה מעידה רק על מתאם, על כך שיש קשר כלשהו בין שני משתנים. היא לא מעידה על סוג הקשר, והיא לא תמיד מעידה על סיבה ותוצאה. יתכן מאד ששני המשתנים שנבדקו – המשקה המוגז והמחלה הממארת – קשורים דרך משתנה שלישי, למשל מיקומם של קיוסקים ליד אתרי פסולת גרעינית, משתנה שהמחקר הספציפי לא היה מודע אליו.

2.4. חיבור תוחלות ושונויות

עבור שני משתנים מקריים x ו-y התוחלת הינה פונקציה ליניארית:

$$E(x+y)=E(x)+E(y) \tag{2.17}$$

אם שני המשתנים המקריים הללו הינם בלתי-תלויים, אזי גם השונות היא פונקציה ליניארית:

$$V(x+y)=V(x)+V(y) \tag{2.18}$$

ואם נציב במשוואה (2.14) את משוואה (2.18) נקבל:

$$\sigma_{x+y}=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2} \tag{2.19}$$

אם, לעומת זאת, שני המשתנים המקריים תלויים זה בזה, יש לקחת בחשבון את הקשר ביניהם שבא לידי ביטוי בשונות המשותפת. משוואות (2.18) ו-(2.19) ישתנו בהתאם:

$$V(x+y)=V(x)+V(y)+2Cov(x,y) \tag{2.20}$$

$$\sigma_{x+y}=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2++2Cov(x,y)} \tag{2.21}$$

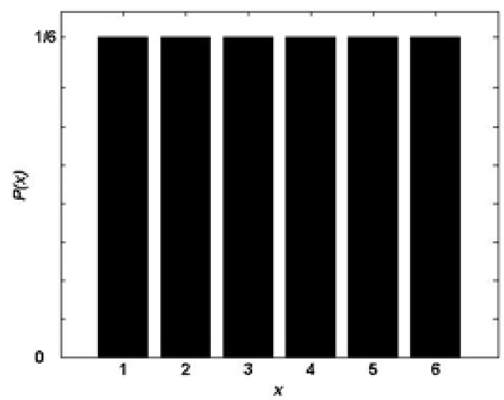
נשוב למשוואות אלה בהמשך, כשנדון בחישוב ובחיבור שגיאות.

3. פונקציות התפלגות הסתברות נפוצות

בחלק זה נכיר מספר פונקציות התפלגות הסתברות נפוצות בהן ניתקל במעבדה. חשוב להדגיש שיש פונקציות רבות נוספות (כגון ההתפלגות המעריכית או התפלגות סטודנט), עליהן תוכלו לקרוא במקורות אחרים.

3.1. התפלגות אחידה

בצורתה הבדידה של **ההתפלגות האחידה** (uniform/flat distribution) כבר נתקלנו כשבחנו את הקוביה. ההכללה למקרה הרציף היא פשוטה: ההתפלגות האחידה מַקְצָה הסתברות שווה לכל ערך של המשתנה המקרי x בטווח $[a,b]$.



תרשים 3.1. פונקצית התפלגות ההסתברות של הקוביה היא התפלגות אחידה: לכל תוצאה אפשרית (הערכים בציר x) יש סיכוי של 1/6 (הערכים בציר y).

התוחלת של ההתפלגות האחידה היא:

$$E(x)=\frac{a+b}{2} \tag{3.1}$$

והשונות שלה:

$$V(x)=\frac{(b-a)^2}{12} \tag{3.2}$$

מתי, בניסויים השונים שלנו, ניתקל בהתפלגות האחידה? כבר בפעם הראשונה שנשתמש בסרגל. כדי לבנות סרגל, או כל כלי מדידה אחר, צריך לקחת טווח מסוים של תוצאות אפשריות ולחלק אותו לשנתות. נגיד, למשל, שלקחנו פיסת עץ באורך של מטר וחילקנו אותה בעזרת 100 שנתות. קיבלנו סרגל בעל דיוק של ס"מ אחד. אבל מה אם, כשאנחנו מודדים את אורך החוברת הזאת, הקצה העליון שלה לא נופל בדיוק על אחת השנתות, אלא ביניהן?

דרך אחת להתמודד עם הבעיה היא לעגל את התוצאה, להחליט על אחת מהשנתות. אבל שימו לב: אם נעגל כך את כל המדידות שנבצע בעזרת הסרגל, אנו נכניס שגיאה שיטתית. אם, למשל, החלטנו לעגל תמיד כלפי מעלה, התוצאה הסופית שלנו תהיה גדולה יותר מהערך האמיתי.

על-פניו, נראה שפשוט צריך למצוא סרגל עם דיוק גבוה יותר; נחלק את הסרגל שלנו לעוד שנתות. אבל מה אם קצה החוברת עדיין נופל בין שתי שנתות? אנחנו לא יכולים להמשיך ולחלק את הסרגל שלנו עד אינסוף. אבל אנחנו כן יכולים לחשוב עליו בצורה קצת שונה.

היצרן מספק לנו סרגל עם דיוק מסוים. הוא יכול להבטיח לנו שהמרחק בין כל שתי שנתות זהה ומוגדר. אם נתייחס לשתי שנתות סמוכות כאל קצותיו של הטווח $\left[a,b\right]$ (למשל, a=42 cm ו-b=43 cm), נוכל לומר שלקצה החוברת יש הסתברות זהה להימצא בכל נקודה בין שתי השנתות. אם כך, נוכל לומר שקריאת הסרגל היא:

$$x=\frac{a+b}{2}\pm\frac{1}{\sqrt{12}}\left(b-a\right) \tag{3.3}$$

שימו לב שהמספר $\left(b-a\right)$ הוא בעצם הדיוק של המכשיר, כפי שקבע היצרן. אם כך, כשנבצע מדידה בעזרת מכשיר מדידה עם דיוק יצרן Δx, תוצאת המדידה תהיה:

$$x=\frac{1}{2}\left(a+b\right)\pm 0.3\Delta x \tag{3.4}$$

כאשר a ו-b הם ערכי השנתות הקרובות.

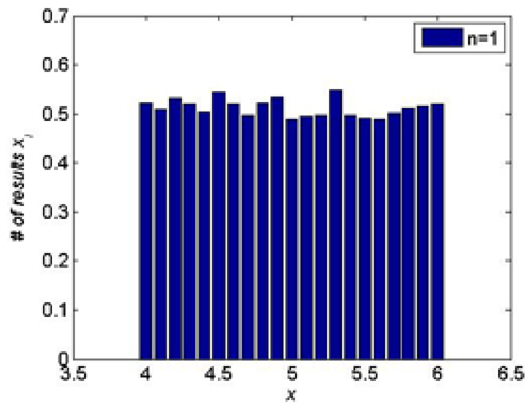
אבל, תשאלו, מה אם קצת החוברת נופלת בדיוק על שנתה מסוימת? ובכן, במקרה כזה יש לבחור את אחת משתי השנתות הקרובות ולהשתמש במשוואה (3.4). האם זה לא מכניס שגיאה שיטתית? רק אם בכל פעם שתיתקלו במקרה שכזה תבחרו לקחת שנתה מאותו הצד (כלומר, תקחו תמיד את השנתה הגבוהה יותר בתור קצה הטווח). כדי להימנע מבעיה זו בחרו כל פעם צד באופן אקראי. כך השגיאה השיטתית תהפוך לעוד אי-ודאות אקראית במדידות.

3.2. התפלגות גאוסיאנית

3.2.1. מקור ההתפלגות וקשרה ההדוק למדידות במעבדה

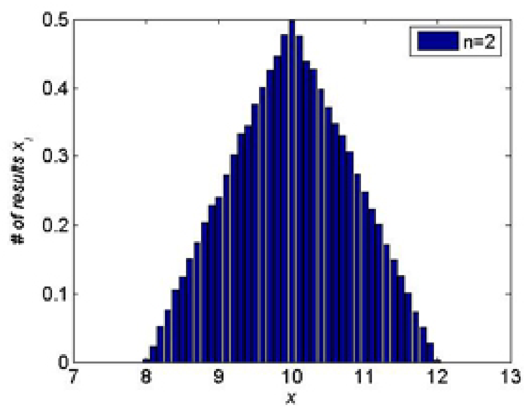
כיוון שאיננו יכולים לזהות את מקורן של כל האי-ודאויות האקראיות שמשפיעות על הניסוי שלנו, לא נוכל לנתח אותן ולכן לא נדע כיצד הן משפיעות על המדידות שלנו וכיצד לבטל את השפעתן. אם כן, נניח שהשפעתו של כל גורם שכזה על הניסוי שלנו מתפלגת בצורה אחידה מסביב לאפס. כלומר, ישנו סיכוי שווה לכך שהאי-ודאות תטה את הערך שנקבל בניסוי מעבר או מתחת לערך האמיתי, בתוך איזשהו טווח שמאפיין את האי-ודאות הזו.

נניח לרגע שהניסוי שלנו מושפע אך ורק מגורם אחד של אי-ודאות. נדמיין שמטרת הניסוי שלנו היא למדוד את מסתה של טיפת מים. בעזרת פיפטה נזליף 5 מ"ל של מים על המאזניים שלנו. בכל פעם שאנו מזליפים טיפה, הפיפטה לא משחררת בדיוק 5 מ"ל של מים, אלא ערך כלשהו שנע בין 4 ל-6 מ"ל. נזליף את הטיפה על המאזניים, נמדוד את מסתה ונרשום את התוצאה. נחזור על הניסוי הזה מספר רב של פעמים ונסדר את התוצאות ב**היסטוגרמה** (histogram): טבלה שבה כל עמודה מייצגת את מספר הפעמים שקיבלנו ערך מסה מסוים. התוצאה תיראה כך:



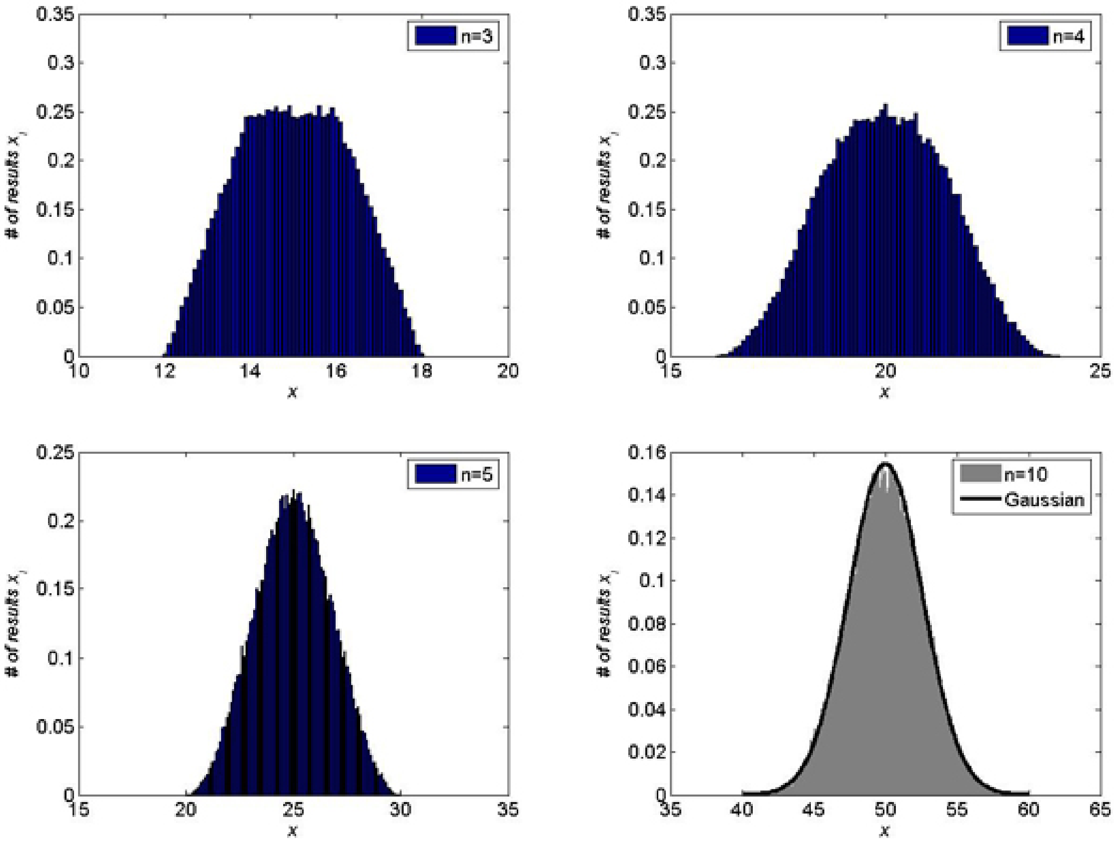
תרשים 3.2. היסטוגרמה של 100,000 מדידות מסה, כאשר בכל מדידה מזליפים טיפה אחת על המאזניים. n מציין את מספר ההזלפות בכל מדידת מסה, או מספר גורמי האי-ודאות במדידה.

אם נזליף עכשיו שתי טיפות, נצטרך להתמודד עם שני גורמי אי-ודאות. כיוון שמדובר באותה התופעה, הרי שלשתי ההזלפות תהיה אותה התפלגות הסתברות אחידה. לכן, נצפה שההיסטוגרמה שנקבל תיראה כמו משולש. ברוב המקרים הסטייה מהערך האמיתי שתיגרם על-ידי ההזלפה הראשונה תתוקן במידה מסוימת על-ידי ההזלפה השנייה (למשל, בהזלפה הראשונה יהיו יותר מ-1 מ״ל מים, ואילו בהזלפה השנייה יהיו פחות מ-1 מ״ל מים). בחלק מהמקרים בשתי ההזלפות נוסיף קצת יותר מדי מים, או קצת פחות מדי מים. ורק במקרים קיצוניים ביותר שתי ההזלפות יגיעו לערכי הסטייה הקיצוניים שלהן. ואכן, הנה התוצאה:



תרשים 3.3. אותו הניסוי, לאחר שתי הזלפות.

התמונות הבאות מראות מה קורה אם ממשיכים להוסיף הזלפות:



תרשים 3.4. אותו הניסוי, כאשר בכל פעם אנו מוסיפים הזלפות, או גורמי אי-ודאות. מספר ההזלפות מסומן ב-n. לתרשים בפינה הימנית התחתונה הוספנו גאוסיאן עם פרמטרים תואמים.

בדוגמאות הנ"ל לכל גורמי האי-ודאות היה את אותו הטווח, אך אותה ההתנהגות מתקבלת גם כאשר מחברים התפלגויות אחידות בעלות טווחים שונים במקצת זה מזה. אם היינו מוסיפים גורם אי-ודאות עם טווח הרבה יותר גדול, לא היינו מקבלים את הצורות הנ"ל, וזאת כיוון שהאי-ודאות הכוללת שלנו בניסוי הייתה נשלטת על-ידי האי-ודאות עם הטווח הגדול. בדרך-כלל בניסויים שלנו, ניתן יהיה להניח שלאי-ודאויות השונות שמשפיעות על הניסוי שלנו יש את אותו הטווח, בקירוב.

שימו לב לנקודה האחרונה. תופעה אקראית תשפיע על תוצאת המדידה רק אם היא מאותו סדר גודל כמו התופעות האחרות. תופעה שהשפעתה הרבה יותר קטנה פשוט לא תשפיע על האי-ודאות הסופית. נחזור למדידת אורך המחברת שלנו. הנחנו שרעידות בידיים וקריאת הסרגל מזוויות שונות עלולות להשפיע על דיוק המדידה שלנו. נניח שההשפעה של שתי התופעות האלו היא מאותו סדר הגודל. מכאן, ששתיהן אכן ישפיעו על המדידה. עכשיו שמנו לב שהטמפרטורה בחדר השתנתה במהלך הניסוי, ואנו חוששים שמא היא השפיעה על אורך הסרגל. כניסיונאים חרוצים, ערכנו ניסוי קטן לבדוק כיצד אורך הסרגל מושפע משינויים בטמפרטורה וגילינו שאכן יש השפעה, אבל היא קטנה במספר סדרי גודל (כלומר, במספר כפולות של 10), מההשפעה של הרעידות בידינו. לכן נוכל להזניח את השפעת השינויים בטמפרטורה על אורך הסרגל.

להיסטוגרמה האחרונה, שמורכבת מעשר הזלפות, או עשרה גורמים שונים של אי-ודאות, הוספנו קו שחור, שמתואר על-ידי פונקציה שנקראת **"ההתפלגות הגאוסיאנית"** (Gaussian distribution), "עקומת הפעמון" (bell curve) או "גאוסיאן", בקיצור. התפלגות זו מוגדרת כך:

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.5)$$

כאשר μ ו- σ הם פרמטרים חופשיים: אנו יכולים לבחור להם ערכים כרצוננו.

התוחלת שלה היא:

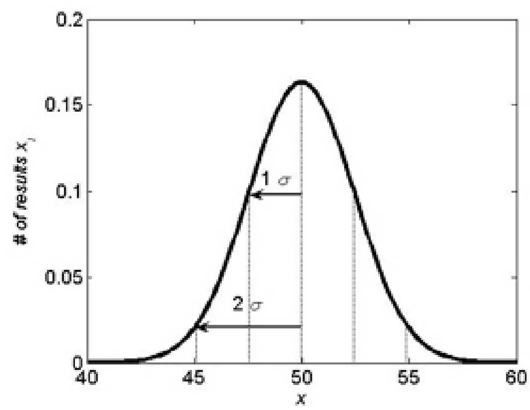
$$E(x)=\mu \quad (3.6)$$

והשונות שלה היא:

$$V(x)=\sigma^2 \quad (3.7)$$

ההתפלגות הגאוסיאנית סימטרית מסביב ל- μ, כך שבמקרה הפרטי הזה התוחלת היא גם הממוצע, גם החציון וגם הערך המסתבר ביותר של ההתפלגות. מעבר לכך, כפי שאפשר לראות מתרשימים 3.1-3.3, μ **הוא הערך האמיתי של הגודל אותו מדדנו**.

הטווח $[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$ כולל כ-68.3% מהשטח הכלוא תחת הגאוסיאן. אם ניזכר שהגאוסיאן, כפונקצית התפלגות הסתברות, מנורמלת לאחד (כלומר, ערכי הפונקציה חולקו בקבוע כדי שערך האינטגרל – השטח שמתחת לפונקציה – יהיה שווה לאחד), נוכל לומר שבכל פעם שנחזור על המדידה, תהיה לנו הסתברות של 68.3% שתוצאת המדידה תיפול בטווח $[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$.



תרשים 3.5. הקו האמצעי מציין את התוחלת של הגאוסיאן (50, בדוגמה זו), והקווים הנוספים מסמנים את טווח ה- 1σ ($[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$) וה- 2σ ($[\mu-2\sigma,\mu+2\sigma]$). השטח שכלוא בטווח ה- 1σ הוא כ-68.3% מכלל שטח הגאוסיאן, והשטח שכלוא בטווח ה- 2σ - כ-95.4%.

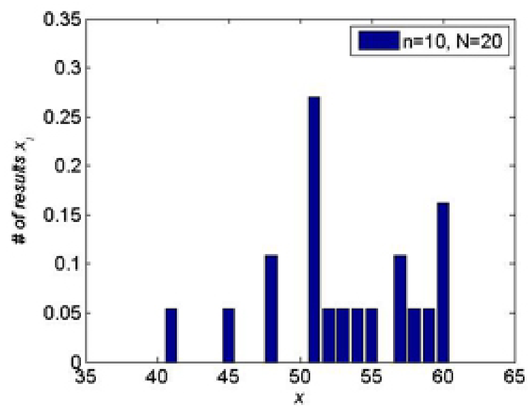
כפי שניתן לראות מתרשימים 3.1-3.3, הפרמטר σ מושפע מרוחב הטווח של פונקציות התפלגות ההסתברות של גורמי האי-ודאות שנכנסו לתוך המדידה. אם כן, הגודל של σ מאפיין את ההשפעה הכוללת של **כל** האי-ודאויות האקראיות בניסוי. לכן, מקובל לקחת את σ כגודל האי-ודאות הכוללת במדידה. שימו לב שמדובר בקונבנציה, בהחלטה שרירותית. באותה מידה יכולנו לקחת את הגודל של 2σ, 3σ, או כל גודל אחר. אך כפי שהוחלט בצורה שרירותית מה

יהיה אורכו של מטר אחד, כך הוחלט ש- σ תהיה הגודל הסטנדרטי שאנו לוקחים עבור אי-ודאות אקראית בניסוי. ההבחנה הזו תהיה חשובה בהמשך, כשנרצה לחבר שגיאות ממדידות שונות.

היזכרו במשוואה (3.4) ושימו לב שטווח האי-ודאות של המדידה בעזרת הסרגל הוא כ-0.6 מכלל הטווח של ההתפלגות האחידה – קרוב לטווח האי-ודאות (0.68) שאנו לוקחים עבור הגאוסיאן.

3.2.2. תורת האומדנים

ראינו שאם נחזור על אותה המדידה מספיק פעמים, בסופו של דבר היסטוגרמה של תוצאות המדידות תיראה כמו גאוסיאן. או אז נוכל למצוא את הגאוסיאן עם ההתאמה הטובה ביותר לנתונים שלנו וממנו לחלץ את הערך האמיתי של הגודל הנמדד - μ - והערכה של השפעת האי-ודאויות האקראיות על המדידות - σ. אבל כדי להגיע לגאוסיאן היפה שבתרשים 3.4 נדרשו 100,000 מדידות. בדרך-כלל, גם במעבדה א' וגם במחקרים אמיתיים, אין ביכולתנו לקחת כל-כך הרבה מדידות. לרוב, ההיסטוגרמות שלנו ייראו כך:



תרשים 3.6. היסטוגרמה של 20 מדידות, כאשר כל מדידה מושפעת מעשרה גורמי אי-ודאות בעלי פונקציות התפלגות הסתברות אחידות. קל לראות שההיסטוגרמה לא נראית כמו גאוסיאן.

להיסטוגרמה שבתרשים 3.6 אי-אפשר להתאים גאוסיאן ולצפות לקבל תוצאות הגיוניות. לעזרתנו נחלצת **"תורת האומדנים"** (estimation theory) שמספקת לנו כלים להעריך – לאמוד - את הגדלים שמעניינים אותנו. תורת האומדנים מבוססת על ההנחה שכאשר אנחנו מבצעים מדידות של גודל מסוים, אנחנו דוגמים את התפלגות הערכים האפשרית שלו. כלומר, אם היינו ממשיכים לבצע עוד ועוד מדידות, בסופו של דבר ההיסטוגרמה שבתרשים 3.6 הייתה נראית כמו גאוסיאן. לכן, למרות שביצענו רק 20 מדידות, כל מדידה היא דגימה של הגאוסיאן שהיינו מקבלים בסופו של דבר, ולכן מכל דגימה אנחנו יכולים לחלץ מידע על ההתפלגות שמסתתרת מאחוריה.

לכל פונקצית התפלגות הסתברות יש אומדנים שונים, ובספרי סטטיסטיקה שונים תוכלו לראות מהן הדרישות הבסיסיות שאומדנים צריכים לקיים, ואיך מפתחים אותם מתמטית. בחוברת זו אנו נסתפק בציון התוצאות הסופיות. אומדנים יסומנו בגגון: $\hat{\mu}$ הוא האומדן של μ.

האומדן לתוחלת של הגאוסיאן הוא:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \langle x \rangle \tag{3.8}$$

כלומר, האומדן הטוב ביותר לתוחלת של הגאוסיאן הוא הממוצע החשבוני הפשוט, כאשר N הוא מספר המדידות ו- x_i היא התוצאה של המדידה ה-i.

האומדן לסטיית התקן של הגאוסיאן:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \langle x \rangle\right)^2}{N-1}} \tag{3.9}$$

בחלק מהספרים תראו את $\hat{\sigma}$ מסומנת באות s. מדוע במכנה מופיע N-1 ולא N? מן הסתם, ממדידה אחת לא נוכל לקבל מידע על רוחב – לכך דרושות לפחות שתי מדידות.

כיוון שמדובר באומדנים, עלינו להעריך את הדיוק שלהם. דרך אחרת לחשוב על כך היא לשים לב שהאומדנים תלויים במספר המדידות N ובתוצאותיהן. לכן, עבור כל סט מדידות נקבל ערך מסוים של האומדן. האומדן, אם כן, הוא משתנה מקרי בזכות עצמו עם פונקצית התפלגות הסתברות. בכל פעם שאנו מבצעים סט מדידות ומחשבים לפיהן אומדנים, אנחנו מקבלים את אחד הערכים האפשריים של האומדן. כמו עם כל משתנה מקרי אחר, נקבל ערכים מסוימים של האומדן בתדירות גבוהה יותר מערכים אחרים; במלים אחרות, לערכים מסוימים של האומדן יש הסתברות גדולה יותר מאשר לערכים אחרים שלו. מדוע? כיוון שהאי-ודאויות שהשפיעו על המדידות שלנו נגררות לתוך חישובי האומדנים.

אם כן, האי-ודאות של אומדן התוחלת היא:

$$\Delta\hat{\mu} \equiv \sigma_x = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}} \tag{3.10}$$

לגודל זה נקרא "**האי-ודאות הסטטיסטית**" (statistic uncertainty).

כלומר, הדיוק של אומדן התוחלת, שבמקרה של הגאוסיאן הוא האומדן לערך האמיתי של הגודל הנמדד, מושפע ממספר המדידות שאנו מבצעים. ככל שנבצע יותר מדידות, כך נצבור יותר מידע על ההתפלגות הבסיסית וכך נוכל לומר בוודאות גדולה יותר מהו הערך האמיתי של הגודל הנמדד. מכאן, שכאשר אנחנו מבצעים מספר מדידות של גודל כלשהו, ההערכה הטובה ביותר לגודל הנמדד היא:

$$\mu = \langle x \rangle \pm \sigma_x \tag{3.11}$$

ממשוואה (3.6) ראינו שאת הביטוי $\mu \pm \sigma$ ניתן להבין כך: אם נחזור על המדידה פעם נוספת, יש לנו הסתברות של 68% שהערך האמיתי של x יימצא בטווח $\left[\mu - \sigma, \mu + \sigma\right]$. גם למשוואה (3.11) יש אותה המשמעות: יש לנו הסתברות של 68% שהערך האמיתי של μ נמצא בטווח $\left[\langle x \rangle - \sigma_x, \langle x \rangle + \sigma_x\right]$.

האי-ודאות של האומדן לסטיית התקן היא:

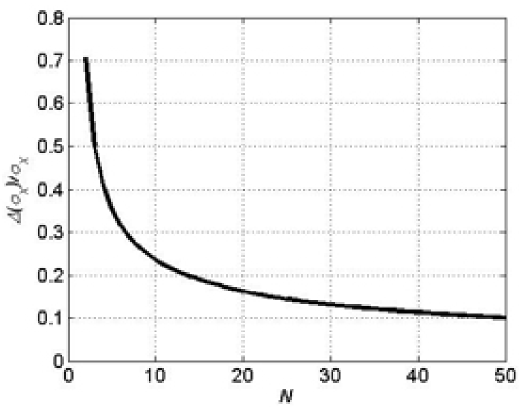
$$\Delta\hat{\sigma} = \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{1}{4}} \hat{\sigma} \qquad (3.12)$$

3.2.3. האי-ודאות שבאי-ודאות

המסקנה המיידית שלנו ממשוואה (3.10) היא שככל שנבצע יותר מדידות, כך נוכל להעריך את הגודל שאנו מחפשים בדיוק רב יותר. הבנו שעלינו לבצע לפחות שתי מדידות, אך כמה מדידות עלינו לבצע בסך-הכל? כדי לענות על שאלה זו נשים לב שגם לאי-ודאות הסטטיסטית σ_x ניתן להתייחס כאל משתנה מקרי, שכן הערך שלה משתנה בהתאם למספר המדידות שביצענו ובהתאם לתוצאות שקיבלנו. אם כן, גם היא משתנה מקרה שמתואר על-ידי פונקצית התפלגות הסתברות עם תוחלת וסטיית תקן. לכן, מספר המדידות שעלינו לבצע הוא אותו מספר שימזער את האי-ודאות באי-ודאות הסטטיסטית. במלים אחרות, עלינו למזער את הגודל:

$$\frac{\Delta\sigma_x}{\sigma_x} = \frac{1}{\sqrt{2N-2}} \qquad (3.13)$$

גודל זה מתואר על-ידי הפונקציה הבאה:



תרשים 3.7. התפלגות השגיאה היחסית של σ_x כפונקציה של מספר המדידות N.

מההתפלגות שבתרשים 3.7 אנו רואים שאם נבצע מספר בודד של מדידות, האי-ודאות שבאי-ודאות של האומדן לערך האמיתי שאנו מודדים תהיה גדולה. במלים אחרות, הדיוק של הערכת האי-ודאות של האומדן לערך האמיתי יהיה נמוך. עשר מדידות כבר יספקו לנו דיוק של 20% וחמישים מדידות יביאו אותנו לדיוק של 10%. כיוון שהניסויים שאנו נבצע במעבדה יוגבלו בזמן, לא תמיד נוכל לבצע חמישים מדידות שונות לכל גודל שעלינו למדוד. לפעמים נצטרך להתפשר על מספר קטן יותר של מדידות. במקרים אלו נוכל להשתמש בקשר הנ״ל כדי להבין כיצד עלינו להתייחס לתוצאות שנקבל.

3.3. התפלגות פואסון

אם λ הוא מספר האירועים הממוצע שמתרחשים במקטע זמן Δt, אזי **התפלגות פואסון** (Poisson distribution) היא פונקצית התפלגות הסתברות שמתארת את ההסתברות לספור כמויות אירועים שונות באותו מקטע זמן Δt. כלומר, אם אנחנו יודעים שמקור קרינה פולט, בממוצע, חמישה חלקיקי אלפא במשך חצי שעה, התפלגות פואסון תתאר את ההסתברות שנקלוט 10, 15 או 20 חלקיקי אלפא מאותו מקור במהלך חצי שעה של מדידות. נשים לב שבניגוד להתלפגות הגאוסיאנית, התפלגות פואסון גם בדידה וגם מתוארת על-ידי פרמטר אחד בלבד (λ):

$$f(x;\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \tag{3.14}$$

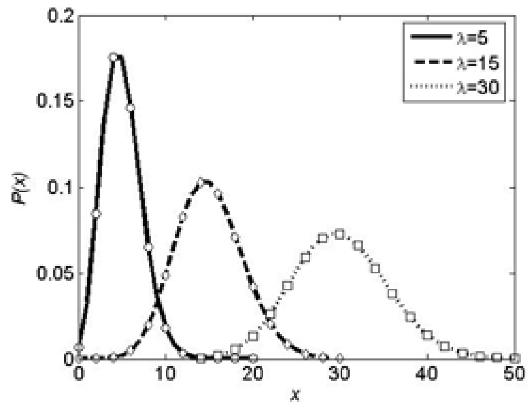
כאשר x הוא מספר האירועים שספרנו.

התוחלת של התפלגות פואסון:

$$E(x)=\lambda \tag{3.15}$$

והשונות שלה:

$$V(x)=\lambda \tag{3.16}$$



תרשים 3.8. התפלגויות פואסון עבור ערכים שונים של הפרמטר λ

התפלגות פואסון היא מקרה פרטי של **ההתפלגות הבינומית** (binomial distribution). אם הגודל שאנו מודדים יכול לקבל אחד משני ערכים בלבד (למשל, מטבע יכול להיות או 'עץ' או 'פלי'; לאלקטרון יכול להיות או ספין $\uparrow$ או ספין $\downarrow$), אזי ההתפלגות הבינומית שואלת: אם נטיל את המטבע שלנו מספר רב של פעמים, כמה פעמים נקבל 'עץ'? ההתפלגות הבינומית נתונה על-ידי:

$$f(x;p,q)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \tag{3.17}$$

כאשר p הוא הסיכוי לקבל 'עץ'; q=1-p הוא הסיכוי לקבל 'פלי'; n הוא מספר הניסיונות הכולל, ו-x הוא מספר הפעמים שקיבלנו את התוצאה 'עץ'. בנוסף:

$$\binom{n}{x} \equiv \frac{n!}{x!(n-x)!} \tag{3.18}$$

כאשר הסימון ! נקרא "**עצרת**" (factorial) ומשמעותו:

$$\begin{gathered} n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 \\ 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \end{gathered} \tag{3.19}$$

התוחלת של ההתפלגות הבינומית:

$$E(x) = np \tag{3.20}$$

והשונות שלה:

$$V(x) = npq \tag{3.21}$$

ההתפלגות הבינומית הופכת להתפלגות פואסון בגבול $p<<1$, כאשר $\lambda = np$. את הפרמטר λ הגדרנו כמספר האירועים הממוצע במקטע זמן Δt, ו-n היה מספר האירועים הכולל. מכאן, שהתפלגות פואסון מתארת מקרים בהם מספר האירועים הממוצע שאנו יכולים למדוד קטן בהרבה ממספר האירועים הכולל. למשל, כשאנו נספור את חלקיקי האלפא שנפלטים על-ידי מקור רדיואקטיבי כלשהו, אנו נספור רק חלק קטן מאד ממספר חלקיקי האלפא שהמקור הזה יפלוט במהלך חייו. כשאסטרונומים אוספים את האור שמגיע מכוכבים מרוחקים, הם סופרים את מעט הפוטונים שהגיעו לטלסקופ מתוך סך-כל הפוטונים שהכוכב פולט.

4. אי-ודאויות של פונקציות: חישוב שגיאות

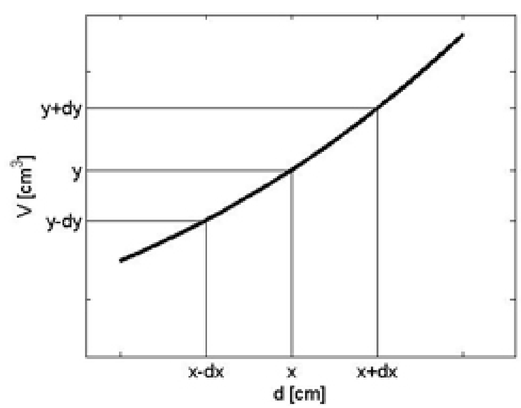
לעתים רחוקות הגדלים שנמדוד במהלך ניסוי יהיו הגדלים שבאמת יעניינו אותנו. בדרך-כלל, נצטרך למדוד מספר גדלי ביניים ולהשתמש בקשרים פיזיקליים מוכרים ביניהם כדי להגיע לגודל שבאמת מעניין אותנו. בחלקים הקודמים למדנו כיצד להעריך את האי-ודאות האקראית של גודל שאנחנו מודדים. קל לראות שכאשר נחבר מספר גדלים מדודים, כל אחד עם אי-ודאות משלו, לכדי ערך סופי, גם לו תהיה אי-ודאות כלשהי. איך נעריך אותה?

4.1. פונקציה של משתנה אחד

נתחיל מהמקרה הפשוט ביותר, בו הגודל שמעניין אותנו תלוי אך ורק בגודל אחד אחר. נניח, למשל, שאנחנו מתעניינים בקוטרו של כדור. בעזרת מיקרומטר מדדנו את קוטרו כמה פעמים ומצאנו שקוטר הכדור הוא $\hat{d} = 5.0 \pm 0.5cm$. הקשר בין נפחו של כדור לקוטרו הוא:

$$V = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \qquad (4.1)$$

כפי שאפשר לראות בתרשים הבא, משוואה (4.1) מקשרת לא רק בין הערך של הקוטר לערך הנפח, אלא גם בין ערכי האי-ודאות.



תרשים 4.1. נפח הכדור כפונקציה של הקוטר שלו. שימו לב שהאי-ודאות בנפח איננה סימטרית.

אם נציב את הערך שמצאנו עבור הקוטר במשוואה (4.1) נמצא שנפח הכדור הוא:

$$\hat{V} \approx 65^{+22}_{-18} \qquad (4.2)$$

שימו לב שעכשיו האי-ודאות איננה סימטרית, ולכן שינינו את סגנון הכתיבה. כמו כן, עיגלנו את התוצאה כך שהשארנו שתי ספרות משמעותיות בלבד.

אם האי-ודאות במדידת קוטר הכדור הייתה קטנה יותר, לא רק שהאי-ודאות בנפח הייתה קטנה בהתאם, אלא שערכיהם של הגבול העליון ושל הגבול התחתון היו מתקרבים זה אל זה. אם, למשל, מדידת הקוטר הייתה $\hat{d} = 5.0 \pm 0.1cm$, הנפח המתקבל היה:

$$\hat{V} \approx 65.0^{+4.0}_{-3.9} \qquad (4.3)$$

ולכן, אם היינו מעגלים את הגבולות כמו במשוואה (4.2), היינו מקבלים: $V = 65 \pm 4 cm^3$.

התוצאה הזו איננה מקרית. קחו את הפונקציה הכי מופרעת; אם תסתכלו על טווח מספיק קטן שלה, היא תיראה כמו קו ישר, וקו ישר תמיד יניב אי-ודאויות עם גבולות סימטריים. הביטוי "טווח מספיק קטן" מיתרגם ל"אי-ודאות מספיק קטנה". כלומר, כאשר האי-ודאות במדידה מספיק קטנה (או כאשר הדיוק מספיק גדול, ולכן השגיאה היחסית מספיק קטנה), נוכל לקרב כל קשר בין שני משתנים לקו ישר.

אם כן, נבטא את הקשר בין הנפח לבין הקוטר בעזרת קו ישר:

$$V = ad + b \tag{4.3}$$

כאשר a ו-b הם הפרמטרים של הקו הישר. כיוון שמדובר בקו ישר, נוכל לפתח אותו לטור טיילור עד סדר ראשון (ניתן לדלג על חלק זה של ההסבר, עד שתלמדו על טורי טיילור ב"מבוא מתמטי לפיזיקאים"):

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0} \tag{4.4}$$

עבור משוואה (4.3), למשל:

$$V(d + \Delta d) \approx V(d) + \Delta d\left(\frac{\partial V}{\partial d}\right) \tag{4.5}$$

נשים לב שמתרשים 4.1 אפשר להביע את האי-ודאות שאנו מחפשים σ_V כ:

$$\sigma_V = V(d + \Delta d) - V(d) \tag{4.6}$$

ולכן, אם ניקח $\Delta d = \sigma_d$ ונשתמש במשוואה (4.5), נראה ש:

$$\sigma_V = \left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)_{d=\hat{d}} \cdot \sigma_d \tag{4.7}$$

כאשר את הנגזרת החלקית צריך להעריך בנקודה $d = \hat{d}$, כלומר בהערכה הטובה ביותר שלנו לקוטר הכדור.

נחזור על החישוב הנ"ל מנקודת מבט אחרת: כיוון שקוטר הכדור הוא משתנה מקרי, גם נפח הכדור, שהוא פונקציה של הקוטר, יהיה משתנה מקרי. לכן, בעזרת משוואה (2.13), וכאשר אנחנו ממשיכים להניח שניתן לתאר את הקשר בין הנפח לבין הקוטר בעזרת משוואה (4.3), נחשב את השונות ואת סטיית התקן של הנפח:

$$\begin{aligned} V(V) &= \left\langle V^2 \right\rangle - \left\langle V \right\rangle^2 \\ &= \left\langle (ad+b)^2 \right\rangle - \left\langle ad+b \right\rangle^2 \\ &= a^2\left\langle d^2 \right\rangle + 2ab\left\langle d \right\rangle + b^2 - a^2\left\langle d \right\rangle^2 - 2ab\left\langle d \right\rangle - b^2 \\ &= a^2\left(\left\langle d^2 \right\rangle - \left\langle d \right\rangle^2\right) \\ &= a^2 V(d) \end{aligned} \tag{4.8}$$

או, במונחים של סטיית התקן (היזכרו במשוואה (2.14)):

$$\sigma_V = |a|\sigma_d \tag{4.9}$$

ממשוואה (4.7) אנו רואים מייד שהפרמטר a הוא בעצם:

$$|a| = \left|\left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)_{d=\hat{d}}\right| \tag{4.10}$$

הקשר האחרון יעזור לנו לחשב את סטיית התקן של פונקציה שתלויה במספר משתנים.

4.2. פונקציה של מספר משתנים – אי-ודאויות קטנות

נניח שבנוסף לקוטר, מדדנו גם את מסת הכדור, ועכשיו אנחנו רוצים לחשב את צפיפותו:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi(d/2)^3} \tag{4.11}$$

נמשיך לעבוד במסגרת ההנחות הקודמות שלנו, היינו שהאי-ודאויות של כל משתנה מספיק קטנות כדי שנוכל להניח שהמשתנה החדש תלוי בהן בצורה ליניארית:

$$\rho = ad + bm + c \tag{4.12}$$

נחזור על הפיתוח שעשינו במשוואה (4.8). לאחר כינוס האיברים השונים נקבל את הביטוי הבא:

$$V(\rho) = a^2\left(\langle d^2\rangle - \langle d\rangle^2\right) + b^2\left(\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2\right) + 2ab\left(\langle dm\rangle - \langle d\rangle\langle m\rangle\right) \tag{4.13}$$

ניזכר במשוואה (2.15) בה הגדרנו את השונות המשותפת ונקבל:

$$V(\rho) = a^2V(d) + b^2V(m) + 2ab\,\mathrm{cov}(d,m) \tag{4.14}$$

עכשיו נשתמש בקשר שמצאנו במשוואה (4.10) ונגיע לביטוי הבא עבור סטיית התקן של הצפיפות:

$$\sigma_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial d}\right)^2\sigma_d^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\right)^2\sigma_m^2 + 2\left(\frac{\partial\rho}{\partial d}\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\right)\mathrm{cov}(d,m)} \tag{4.15}$$

נשים לב שאם הקוטר והמסה הם משתנים בלתי-תלויים (הם לא, כיוון שהם קשורים דרך צפיפות הכדור, אך לשם הדוגמה נניח שכן), אזי השונות המשותפת תתאפס ונישאר עם ביטוי די פשוט.

ההכללה למקרה בו המשתנה החדש שאנו מחפשים תלוי ב-n משתנים אחרים הוא מיידי:

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2\sigma_{x_i}^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\mathrm{cov}(x_i, x_j)} \tag{4.16}$$

כאשר בסכימה השנייה אנחנו דואגים לסכום על זוגות של משתנים שונים בכל פעם. בדרך-כלל, הגדלים שאנו נמדוד במעבדה יהיו בלתי-תלויים, ולכן נוכל להסתפק במשוואה הפשוטה יותר:

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2\sigma_{x_i}^2} \tag{4.17}$$

בעזרת קצת אלגברה, ניתן לשחק במשוואה (4.17) ולהגיע לקשרים החשובים הבאים. עבור משתנה חדש z שתלוי ב-x ו-y (אך x ו-y בלתי-תלויים), בעלי אי-ודאויות שמתבטאות בסטיות התקן σ_x ו-σ_y :

טבלה 4.1. פונקציות נפוצות והקשרים המקבילים בין סטיות התקן

צורת הפונקציה	הקשר בין סטיות התקן
$\begin{cases} z = x + y \\ z = x - y \end{cases}$	$\sigma_z = \sqrt{(\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2}$
$\begin{cases} z = xy \\ z = x / y \end{cases}$	$\dfrac{\sigma_z}{z} = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2}$

שימו לב שעבור כל פונקציה אחרת יש לחשב את הקשר לפי משוואה (4.17).

4.3. פונקציה של מספר משתנים – אי-ודאויות גדולות

בחלק 4.1 ראינו שאם המשתנה החדש שאנו מחפשים תלוי במשתנה עם אי-ודאות גדולה, לא נוכל להשתמש בקירוב הנוח לקו ישר ונצטרך לתרגם את טווח האי-ודאות של המשתנה הראשון לטווח האי-ודאות של המשתנה השני בכך שנציב את המספרים המתאימים בפונקציה שמקשרת בין השניים. נעשה משהו דומה גם במקרה שהמשתנה החדש שלנו תלוי במספר משתנים.

נחזור לחישוב של צפיפות הכדור. לאי-ודאות בצפיפות σ_ρ יש שתי תרומות: לתרומה של האי-ודאות בקוטר נקרא σ_ρ^d ולתרומה של האי-ודאות במסה נקרא σ_ρ^m. הקשר בין התרומות ניתן על-ידי משוואה (2.19):

$$\sigma_\rho = \sqrt{\left(\sigma_\rho^d\right)^2 + \left(\sigma_\rho^m\right)^2} \tag{4.18}$$

אנחנו יכולים לחשב את כל אחת מהתרומות בנפרד בעזרת משוואה (4.5), כאשר כדי לחשב את תרומת האי-ודאות בקוטר, נדאג להשאיר את המסה קבועה; ואילו עבור תרומת האי-ודאות במסה – נדאג להשאיר את הקוטר קבוע. חשוב לזכור שכאשר האי-ודאויות גדולות, האי-ודאות של המשתנה החדש – הצפיפות – לא תהיה סימטרית. לכן, עלינו לחשב בנפרד את התרומות לטווח העליון של האי-ודאות ולטווח התחתון שלה.

אם $\hat{d}$ הוא ההערכה הטובה ביותר שלנו לקוטר ו- $\hat{m}$ - ההערכה הטובה ביותר שלנו למסה, אזי התרומות של הקוטר ושל המסה לטווח העליון של האי-ודאות בצפיפות יהיו:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_+}^d &= \rho\left(d = \hat{d} + \sigma_d, m = \hat{m}\right) - \rho\left(d = \hat{d}, m = \hat{m}\right) \\ \sigma_{\rho_+}^m &= \rho\left(d = \hat{d}, m = \hat{m} + \sigma_m\right) - \rho\left(d = \hat{d}, m = \hat{m}\right) \end{aligned} \tag{4.19}$$

והתרומות שלהם לטווח התחתון של האי-ודאות בצפיפות יהיו:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_-}^d &= \rho\left(d = \hat{d} - \sigma_d, m = \hat{m}\right) - \rho\left(d = \hat{d}, m = \hat{m}\right) \\ \sigma_{\rho_-}^m &= \rho\left(d = \hat{d}, m = \hat{m} - \sigma_m\right) - \rho\left(d = \hat{d}, m = \hat{m}\right) \end{aligned} \tag{4.20}$$

מכאן נוכל לחשב:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^+ &= \sqrt{\left(\sigma^d_{\rho_+}\right)^2 + \left(\sigma^m_{\rho_+}\right)^2}\\ \sigma_\rho^- &= \sqrt{\left(\sigma^d_{\rho_-}\right)^2 + \left(\sigma^m_{\rho_-}\right)^2}\end{aligned} \tag{4.21}$$

וההערכה הטובה ביותר שלנו לצפיפות הכדור תהיה, לבסוף:

$$\rho = \rho\left(d = \hat{d}, m = \hat{m}\right)^{+\sigma_\rho^+}_{-\sigma_\rho^-} \tag{4.22}$$

את התהליך הנ"ל ניתן להכליל בקלות עבור n משתנים.

4.4. חיבור דגימות שונות של אותו הגודל

נניח שכדי למצוא גודל מסוים ביצענו שני סטים של מדידות. למשל, כדי למדוד את השדה המגנטי של כדור-הארץ, החלטתם למדוד את היסטו של מצפן שנתון בין שני סלילים מוליכי זרם חשמלי. ביצעתם 12 מדידות של היסט המחט ויצאתם מהמעבדה כדי לאכול ארוחת צהריים. כשאתם חוזרים, אתם מחליטים ש-12 מדידות לא יספיקו ולכן אתם מבצעים 8 מדידות נוספות. אתם מניחים שאם הייתם מבצעים מספר גדול מאד של ניסויים, היסטוגרמה של התוצאות הייתה נראית כמו גאוסיאן, ולכן אתם מרגישים בטוחים שהאומדן לתוחלת הגאוסיאן יניב הערכה טובה לגודל האמיתי שאתם מחפשים. אתם מתפתים לחשב אותו כך:

$$\hat{\delta} = \frac{1}{20}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{20}\right) \tag{4.23}$$

אבל עוצרים את עצמכם מבעוד מועד. מה אם משהו במערך הניסוי השתנה בזמן שהייתם מחוץ למעבדה? אולי התוצאה של סט המדידות השני תהיה שונה בעליל מהתוצאה שתתקבל מסט המדידות הראשון? אתם מחליטים שעדיף להתייחס לכל סט מדידות בנפרד ולחשב:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_1 &= \frac{1}{12}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}\right)\\ \hat{\delta}_2 &= \frac{1}{8}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_8\right)\end{aligned} \tag{4.24}$$

לשמחתכם, אתם מגלים שהתוצאות לא שונות מאד זו מזו. לכן, אתם מחליטים לחבר בין שתי התוצאות הנ"ל. כיצד תעשו זאת? על אף הפיתוי, אתם לא יכולים לקחת את הממוצע הפשוט שלהן. חשבו על כך: כשביצעתם את המדידות השונות "דגמתם" את פונקצית התפלגות ההסתברות שמסתתרת מתחת לערכים שקיבלתם. לכן, בסט המדידות הראשון, כיוון שלקחתם יותר מדידות, "אספתם יותר מידע" על פונקצית התפלגות ההסתברות. לכן, התוצאה שתקבלו מסט המדידות הראשון תהיה קרובה יותר לתוצאה האמיתית. כדי לציין זאת, נעניק לתוצאת הסט הראשון משקל גדול יותר בחישוב הממוצע. כיוון שככל שנבצע יותר מדידות, כך נאסוף יותר מידע, המשקל שניתן לכל סט יהיה מספר המדידות שהוא כולל. הממוצע המשוקלל, אם כן, יהיה:

$$\left\langle \hat{\delta} \right\rangle = \frac{12\hat{\delta}_1 + 8\hat{\delta}_2}{20} \tag{4.25}$$

או, באופן כללי יותר:

$$\langle x \rangle = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} \tag{4.26}$$

כאשר w_i הוא המשקל שמוענק לתוצאת סט המדידות ה-i.

נכליל את הבעיה. נניח שביצעתם n סטים של מדידות, כאשר לכל סט חישבתם את האומדן לערך האמיתי ואת השגיאה הסטטיסטית שלו: $x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, \cdots, x_n \pm \Delta x_n$. בכל סט ביצעתם מספר שונה של מדידות, אך בכל פעם אתם דוגמים את אותה ההתפלגות הבסיסית. ממשוואה (3.10) אנו זוכרים שהשגיאה הסטטיסטית של כל תוצאת מדגם היא:

$$\Delta x_i = \frac{\sigma}{\sqrt{n_i}} \tag{4.27}$$

כאשר σ היא האומדן לסטיית התקן של ההתפלגות שאנו דוגמים, ו-n_i הוא מספר המדידות במדגם ה-i. הגדרנו שהמשקל שניתן לכל מדגם הוא מספר המדידות שכלולות בו, ולכן:

$$w_i = n_i = \frac{\sigma^2}{(\Delta x_i)^2} \tag{4.28}$$

את התוצאה הזו אנו יכולים להציב במשוואה (4.26) ולקבל את ערכו של הממוצע המשוקלל. אך רגע לפני כן, עלינו לחשב את האי-ודאות שלו. כיוון שאנו מרכזים את כל המידע שאספנו על ההתפלגות שמאחורי המדידות, אנו יכולים גם כאן להשתמש בביטוי עבור השגיאה הסטטיסטית:

$$\Delta \langle x \rangle = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum n_i}} \tag{4.29}$$

הממוצע המשוקלל של כל המדגמים שלנו יהיה, אם כן:

$$\langle x \rangle \pm \Delta \langle x \rangle = \frac{\sum (1/\Delta x_i)^2 x_i}{\sum (1/\Delta x_i)^2} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum (1/\Delta x_i)^2}} \tag{4.30}$$

נשים לב שבפיתוח האינטואיטיבי הנ"ל הנחנו שאנחנו תמיד דוגמים את אותה ההתפלגות הגאוסיאנית. אך זה לא מדויק. נניח, למשל, שכל מדגם מדדנו בכלים שונים, עם רגישויות שונות. מכאן, שבכל מדגם אנו דוגמים התפלגות גאוסיאנית שונה. ההכללה במקרה זה היא פשוטה. נגדיר מחדש את המשקל שאנו מעניקים לכל סט מדידות. במקום שהוא יהיה תלוי במספר המדידות, כעת הוא יהיה תלוי ברוחב הגאוסיאן σ_i, כיוון שהוא מתאר באופן ייחודי את סט המדידות ה-i. אם כן, המשקל שלנו יוגדר עתה כך:

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \tag{4.31}$$

ומשוואה (4.30) תשתנה בהתאם:

$$\langle x \rangle \pm \Delta \langle x \rangle = \frac{\sum (x_i / \sigma_i^2)}{\sum (1/\sigma_i^2)} \pm \frac{1}{\sqrt{\sum (1/\sigma_i^2)}} \tag{4.32}$$

5. התאמות לנתונים

כפיזיקאים, אנו משקיעים מאמצים רבים במציאת **קשרים** בין גדלים שונים: כיצד ההארה של כוכב תלויה במסה שלו? איך ישפיע שינוי בטמפרטורה של גז על הנפח והלחץ שלו? מהי התלות בין הזרם העובר דרך נגד, לבין ההספק שלו? בפרקים הקודמים למדנו כיצד לבצע מדידות של גדלים שונים וכיצד להעריך את האי-ודאויות שלהן. כעת נלמד כיצד לגלות מהו הקשר הפיזיקלי שמקשר בין המדידות השונות. נתמקד בשתיים מהשיטות הנפוצות ביותר: הריבועים המינימליים (והתפלגות χ^2) ושיטת הנראות המירבית.

הדרכים השונות בהן נבצע התאמות למדידות דומות מאד לשיטת האומדנים שראינו בפרקים הקודמים. היכן שמקודם מצאנו דרכים שונות לאמוד את הגדלים שרצינו למדוד, כעת נאמוד את הפרמטרים של ההתאמה. למה הכוונה בפרמטרים? נניח שהפלנו חפץ מגובה מסוים ומדדנו הן את המרחק שהוא נפל והן את זמן הנפילה. אנו משערים שהקשר בין הדרך שהוא עבר לבין הזמן הוא:

$$h = gt^a \tag{5.1}$$

כאשר h הוא המרחק שהגוף עבר; t – משך הנפילה ו-g ו-a – איזשהם גדלים מסתוריים שמקשרים בין שני הגדלים שמדדנו.

בעזרת ההתאמות שנבצע ננסה לאמוד את גודלם של g ו-a. הם נקרא פרמטרים, כיוון שהם מאפיינים (to parametrize, באנגלית) את הקשר הפיזיקלי. שימו לב, שבמקרה הנוכחי הנחנו שהקשר בין המרחק לבין הזמן הוא חוק חזקה. באותה מידה יכולנו להניח שהקשר בין השניים הוא ליניארי, טריגונומטרי או אינסוף אפשרויות אחרות. זו הפעם הראשונה שאנו יכולים, על רגל אחת, לתאר את ההבדל הבסיסי בין פיזיקאים ניסיונאים לבין פיזיקאים תיאורטיקנים: הניסיונאים מנסים לגלות את הצורה המתמטית שמתארת בצורה הטובה ביותר את המדידות שלהם, בעוד שהתיאורטיקנים מנסים להסביר מה עומד מאחורי אותו קשר מתמטי וכיצד ניתן לקשור אותו למכלול גדול יותר של קשרים שכבר התגלו.

5.1. שיטת הריבועים המינימליים

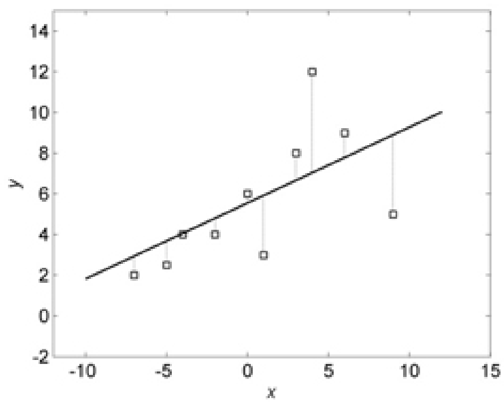
<u>5.1.1. תיאור כללי של השיטה</u>

שיטת **הריבועים המינימליים** (Least Squares) מניחה שהפונקציה המתאימה ביותר לסט המדידות היא זו שהערכים האידיאליים שהיא מספקת הכי קרובים לערכים שמדדנו. כדי לבדוק את ההתאמה שלנו, אם כן, נרצה להשתמש במרחק:

$$y_i - f(x_i;a) \tag{5.2}$$

כאשר y_i הם הערכים שמדדנו ו-$f(x_i;a)$ הם הערכים שמספקת הפונקציה התיאורטית שאנו בודקים, כאשר x_i הן הנקודות בהן מעריכים את הפונקציה ו- a הם הפרמטרים שמגדירים אותה.

כדי להתחשב בכל הנקודות, נסכום את המרחקים מכל הנקודות השונות. כיוון שחלק מהנקודות יהיו מעל ההתאמה וחלק מתחתן, וכדי לתת יותר משקל למדידות בעלות מרחקים גדולים יותר מההתאמה, נעלה את המרחק בריבוע.



תרשים 5.1. הריבועים הריקים מסמנים מדידות והקו השחור העבה מסמן התאמה ליניארית אפשרית למדידות. הקווים הדקים שמחברים בין המדידות לבין קו ההתאמה מייצגים את מרחקי המדידות מההתאמה. התאמת הריבועים המינימליים מחפשת את הפרמטרים עבורם סכום ריבועי המרחקים בין המדידות לבין הקו המתקבל, יהיה קטן ככל האפשר.

כמו כן, כדי להתחשב באי-ודאויות של המדידות, נחלק כל מרחק באי-ודאות של המדידה. כך נוכל להעניק יותר משקל לנקודות בעלות מדידות מדויקות יותר. לגודל החדש שיצרנו נקרא χ^2 ("חִי בריבוע"[1], או chi-square):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{y_i - f(x_i; a)}{\sigma_i} \right]^2 \tag{5.3}$$

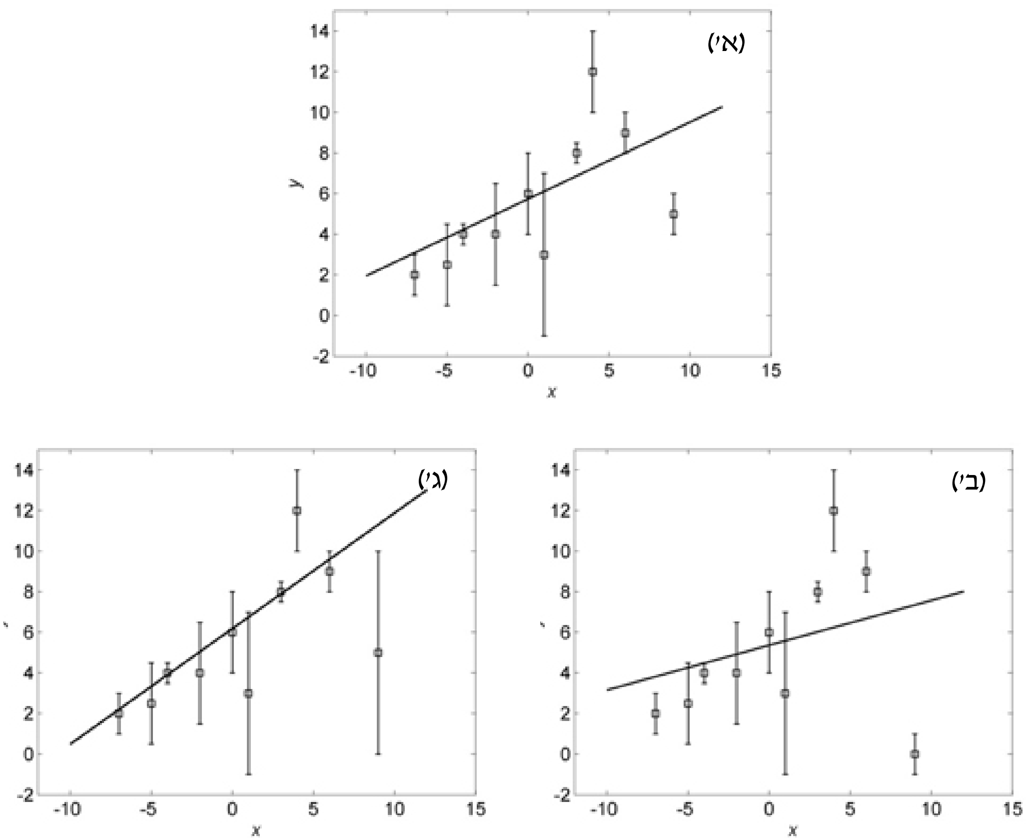
כאשר הסכימה רצה על N המדידות שלנו.

כדי לאמוד את גודלם של הפרמטרים a שנותנים את ההתאמה הטובה ביותר, נרצה **למזער** את המרחקים בין המדידות לבין הערכים התיאורטיים, ולכן נחפש את האומדנים $\hat{a}$ שממזערים את משוואה (5.3):

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0 \tag{5.4}$$

אם ההתאמה מורכבת מ-n פרמטרים שונים, נצטרך לפתור n משוואות דוגמת משוואה (5.4). לאומדנים שנקבל ממשוואה (5.4) יש אי-ודאויות משלהם, אותם נמצא באמצעות השיטות שתוארו בפרק 4.

[1] בעברית משתדלים לבטא אותיות יווניות כמו ביוונית, ולכן χ מבטאים "חִי". באנגלית מבטאים אותה "קַיי".



תרשים 5.2. התאמת ריבועים מינימליים לסט מדידות. בכל התרשימים, הריבועים הריקים מסמנים מדידות והקוים הישרים הם ההתאמה הליניארית הטובה ביותר למדידות.

התרשים הנ"ל מתדגים כיצד שיטת הריבועים המינימליים מושפעת ממיקומן של המדידות, ומהאי-ודאויות שלהן. תרשים (א') יהיה מקרה המוצא שלנו. במקרה הנ"ל ניסינו להתאים למדידות קו ישר שנראה כמו $y = ax + b$. הקו לא יכול לעבור דרך כל המדידות, אך משתדל לעבור דרך האי-ודאויות של רובן, ומושפע יותר מנקודות עם אי-ודאויות קטנות. זו הסיבה ששיפוע הקו נוטה יותר לעבר שלוש המדידות סביב $x = 5$. במקרה (ב') הנמכנו את המדידה הקיצונית ב- $x = 9$. כיוון שהאי-ודאות שלה קטנה, כלומר היא מדידה מדויקת, יחסית למדידות האחרות, היא גוררת את שיפוע הקו הישר לכיוונה. במקרה (ג') השארנו את המדידה ב- $x = 9$ במקומה, אך הגדלנו את האי-ודאות שלה. עכשיו שהיא פחות מדויקת, ההתאמה מעניקה לה משקל קטן יותר, ושיפוע הקו נוטה חזק יותר לעבר המדידות המדויקות יותר סביב $x = 5$.

שימו לב לנקודות הבאות:

- הנחנו ש- x_i ידועים בצורה מוחלטת, היינו שאין להם שום אי-ודאות. כיוון שבכל ניסוי אנו נמדוד גם את x_i וגם את y_i הרי שעל פניו הנחה זו שגויה. כדי שבכל זאת נוכל להשתמש בשיטת הריבועים המינימליים, נדאג לבנות את הבעיה כך שהאי-ודאויות ב- y_i יהיו הרבה

יותר גדולות מאלו שב- x_i (או, במלים אחרות, שהשגיאות היחסיות של y_i יהיו הרבה יותר גדולות מאלו של x_i). אם ל- x_i ול- y_i יש אי-ודאויות מאותו סדר גודל, נצטרך להשתמש בוריאציה של הריבועים המינימליים שתתואר בהמשך.

- אם לכל המדידות y_i יש את אותה האי-ודאות $\sigma_i = \sigma$, הרי שאין טעם להתחשב באי-ודאות הזו, כיוון שהיא לא מוסיפה מידע חדש לשאלת המרחק בין המדידה לבין ההתאמה. במקרה כזה נוותר על σ_i במשוואה (5.3). לשיטה הזו נקרא "**הריבועים המינימליים הפשוטים**". לשיטה בה אנו כן מתחשבים באי-ודאויות σ_i נקרא "**הירבועים המינימליים המשוקללים**".

5.1.2. התאמה לקו ישר

ההתאמה הנפוצה ביותר היא לקו הישר $y=ax+b$, והיא בדרך-כלל ההתאמה הראשונה שנבדוק. נחשב את האומדנים $\hat{a}$ ו- $\hat{b}$ בשיטת הריבועים המינימליים הפשוטים, ולאחר מכן – במשוקללים.

א. ריבועים מינימליים פשוטים

עלינו למזער את המשוואה:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - ax_i - b\right)^2 \tag{5.5}$$

נגזור אותה לפי הפרמטרים השונים:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^2}{\partial a} &= \sum_i 2x_i\left(y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}\right) = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial b} &= \sum_i -2\left(y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}\right) = 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

לאחר קצת אלגברה, וחלוקה של כל אחת מהמשוואות ב-N, נקבל את המשוואות הבאות עבור האומדנים:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \\ \hat{b} &= \overline{y} - \hat{a}\overline{x} \end{aligned} \tag{5.7}$$

כאשר הגדלים $\overline{x}, \overline{y}$ למיניהם הם ממוצעים פשוטים.

כדי למצוא את האי-ודאויות של האומדנים נשתמש במשוואה (4.16):

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \hat{a}}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_i^2 = \sum \left[\frac{x_i - \overline{x}}{N\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)}\right]^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)} \\ \sigma_b^2 &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \hat{b}}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_i^2 = \frac{\sigma^2\,\overline{x^2}}{N\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)} \end{aligned} \tag{5.8}$$

ב. ריבועים מינימליים משוקללים

הפעם עלינו למזער את המשוואה:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i}\right]^2 \tag{5.9}$$

המשוואות המתקבלות דומות מאד לאלו שקיבלנו באמצעות הריבועים המינימליים הפשוטים, אלא שעכשיו הגדלים $\bar{x}, \bar{y}$ למיניהם לא מתארים ממוצעים פשוטים, אלא ממוצעים משוקללים בהם כל נקודה מקבלת את המשקל $1/\sigma_i^2$. זה גם אומר שהממוצע לא כולל חלוקה ב-N, אלא בסכום המשקלים:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \rightarrow \frac{\sum x_i / \sigma_i^2}{\sum 1/\sigma_i^2} \tag{5.10}$$

זה תקיף גם עבור הגודל σ^2 שמופיע במשוואה (5.8):

$$\overline{\sigma^2} = \frac{\sum \sigma_i^2 / \sigma_i^2}{\sum 1/\sigma_i^2} = \frac{N}{\sum 1/\sigma_i^2} \tag{5.11}$$

שימו לב ששתי המשוואות האחרונות שקולות למשוואה (4.31). זאת, כיוון שהממוצע המשוקלל הוא מקרה פרטי של שיטת הריבועים המינימליים המשוקללים.

ג. השונות המשותפת של האומדנים

כמו לכל שני משתנים אחרים, גם לאומדנים $\hat{a}$ ו- $\hat{b}$ עלולה להיות שונות משותפת, כלומר הם עלולים להיות תלויים זה בזה. במבט ראשון, ההצהרה הנ"ל נראית ברורה מאליה; הרי אנחנו מתאימים קו ישר, ועבור קו ישר תמיד תהיה תלות בין השיפוע a לבין נקודת החיתוך b. אך עלינו לזכור שהאומדנים $\hat{a}$ ו- $\hat{b}$ אינם הפרמטרים a ו-b, אלא הערכות שלהם בלבד. כיוון שבביצוע ההתאמה אנו מחפשים את ההערכות הטובות ביותר לפרמטרים, נשאף שהאומדנים לא יהיו תלויים אלה באלה: כך נוכל לקבל תמונה ברורה יותר של הקשר אותו אנחנו מחפשים.

איך נבדוק האם קיימת תלות בין האומדנים? נחשב את השונות המשותפת:

$$\mathrm{cov}\left(\hat{a}, \hat{b}\right) = \sum_i \frac{\partial \hat{a}}{\partial y_i}\frac{\partial \hat{b}}{\partial y_i}\sigma_i^2 = -\frac{\bar{x}}{N\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)}\sigma^2 \tag{5.12}$$

אם השונות המשותפת שונה מאפס, הרי שהאומדנים תלויים זה בזה.

עבור הקו הישר נוכל להיפטר מהתלות בין האומדנים אם נגדיר משתנים חדשים:

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i - \bar{x} \\ y_i' &= y_i - \bar{y} \end{aligned} \tag{5.13}$$

ד. הכללה: ריבועים מינימליים ליניאריים

עד עכשיו דיברנו על הקו הישר, שמאופיין על-ידי המשוואה $y=ax+b$. ניתן להכליל את הפיתוח שעשינו בחלק זה לכל משוואה ליניארית, היינו לכל משוואה שנראית כך:

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (5.14)$$

כאשר a_n הוא המקדם של האיבר ה-n, שהוא בעצם x^n. מייד רואים שהקו הישר, כמו גם הפרבולה, הם מקרים פרטיים של משוואה (5.14). ההכללה של הריבועים המינימליים למשוואה זו אמנם פשוטה, אך היא דורשת אלגברה ליניארית, ולכן נשאיר אותה למעבדה ב׳.

5.2. בדיקת טיב ההתאמה: התפלגות χ^2

התאמנו פונקציה כלשהי למדידות שלנו וקיבלנו אומדנים, כולל אי-ודאויות, לפרמטרים של הפונקציה. אך האם הפונקציה הזו נותנת לנו את ההתאמה הטובה ביותר? כיצד נדע אם היא מתאימה למדידות שלנו יותר, או פחות, מכל פונקציה אחרת? ישנן דרכים רבות לבדוק את **טיב ההתאמה** (goodness of fit), אך אנחנו נסתפק במבחן שנקרא χ^2.

הגודל χ^2 שהגדרנו במשוואה (5.3) מורכב ממשתנים מקריים, ולכן גם הוא משתנה מקרי בעל פונקצית התפלגות הסתברות. לפונקציה[2] הזו קוראים P והמשתנה המקרי שלה הוא χ^2:

$$P\left(\chi^2; n\right) = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)} \chi^{n-2} e^{-\chi^2/2} \qquad (5.15)$$

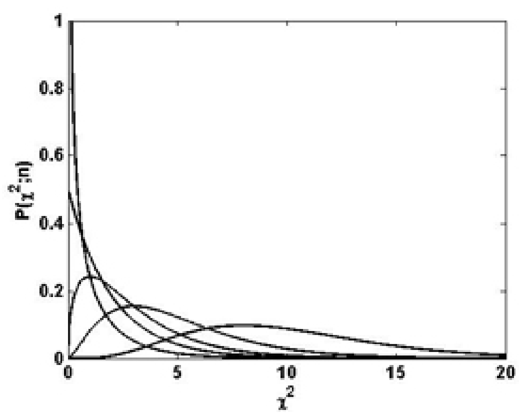
כאשר הפונקציה $\Gamma(x)$ נקראת **״פונקצית גאמה״** (Gamma function).

התוחלת של ההתפלגות היא:

$$E\left(\chi^2\right) = n \qquad (5.16)$$

והשונות שלה היא:

$$V\left(\chi^2\right) = 2n \qquad (5.17)$$



תרשים 5.3. התפלגויות χ^2 עבור n=1,2,3,5,10 דרגות חופש. שימו לב שעבור $n \to \infty$ ההתפלגות שואפת להתפלגות גאוסיאנית.

[2] שימו לב שבספרות לפונקציה P קוראים גם התפלגות χ^2. כך קוראים גם למשתנה של הפונקציה, הוא אותו χ^2 שהגדרנו במשוואה (5.3).

צורתה של התפלגות χ^2 לא מעניינת אותנו ולא נתעמק בה. אנו כן נתעניין בגודל n שמופיע במשוואה. הגודל הזה נקרא **מספר דרגות החופש** (degrees of freedom) והוא בעצם מספר המדידות N פחות מספר הפרמטרים k שאנו מתאימים.

$$n = N - k \tag{5.18}$$

ביצענו את ההתאמה וקיבלנו אומדנים לפרמטרים של הפונקציה f. נציב את האומדנים האלו בחזרה לתוך הפונקציה ונקרא לה $\hat{f}$. את הפונקציה הזו נוכל להציב עכשיו חזרה לתוך χ^2. כיוון שאת האומדנים מצאנו בכך שמזערנו את χ^2, הרי שהגודל החדש שמצאנו הוא:

$$\chi^2_{\min} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{y_i - \hat{f}_i}{\sigma_i}\right]^2 \tag{5.19}$$

והגודל הזה מתפלג התפלגות χ^2 (היינו, לפי הפונקציה P ממשוואה (5.15)) עם $n = N - k$ דרגות חופש, כאשר k הוא מספר הפרמטרים.

התוחלת של הגודל החדש הזה תהיה:

$$E\left(\chi^2_{\min}\right) = (N-k) \pm \sqrt{2(N-k)} \tag{5.20}$$

מכאן נוכל למצוא את התוחלת לדרגת חופש:

$$\chi^2_{red} \equiv E\left(\frac{\chi^2_{\min}}{N-k}\right) = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(N-k)}} \tag{5.21}$$

את הגודל האחרון נוהגים לכנות χ^2_{red} (בספרות תראו אותו מתואר כ-**reduced chi-square**, או **chi-square per degree of freedom**. אנו נכנה אותו "**חי-בריבוע לדרגת חופש**") ומהערך שלו אנו יכולים להסיק את טיב ההתאמה. באופן הכללי ביותר, ככל שההתאמה טובה יותר, כך $\chi_{red}{}^2$ ממשוואה (5.20) ישאף ל-1. אם $\chi^2_{red} >> 1$, סימן שהפונקציה שניסינו להתאים לא מתארת טוב את המדידות. אם $\chi^2_{red} << 1$, סימן שהאי-ודאויות שחישבנו עבור המדידות שלנו גדולות מדי ויכולות להיות מספר פונקציות שיתאימו למדידות באותה המידה.

<u>5.2.1. שימוש ב- χ^2 להערכת האי-ודאויות של המדידות</u>

כיוון שעבור ההתאמה הטובה ביותר ערכו של χ^2_{red} צריך להיות 1 (לכל דרגת חופש), נוכל להשתמש בתכונה זו כדי לספק חסם עליון לאי-ודאות במדידות שלנו. נניח שהאי-ודאויות של המדידות בציר y קבועות ושערכן הוא $\sigma = \sqrt{c}$. אם כך, משוואה (5.3) תהפוך ל:

$$\chi^2 = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - f(x_i;a)\right]^2 \tag{5.22}$$

נמזער, אם כן, את הביטוי:

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - f(x_i\,;a) \right]^2 \qquad (5.23)$$

ונזכור שמתקיים הקשר:

$$E\left(\chi^2_{\min}\right) = N - k = \frac{Q^2_{\min}}{c} = 1 \qquad (5.24)$$

ומכאן נקבל את ההערכה לאי-ודאויות של המדידות:

$$\sigma = \sqrt{c} = \sqrt{\frac{Q^2_{\min}}{N-k}} \qquad (5.25)$$

5.3. בדיקת טיב ההתאמה: שארים

דרך נוספת לבדוק את טיב ההתאמה בין מדידות לבין קשר תיאורטי כלשהו הוא בעזרת ניתוח **שארים** (residuals): הגודל המתקבל כאשר מחסירים את הערכים שמתקבלים מההתאמה מערכי המדידות:

$$res = y_i - f(x_i) \qquad (5.26)$$

כאשר y_i היא המדידה ה-i; $f(x_i)$ הוא ערך ההתאמה בנקודה x_i.

נגדיר גודל נוסף: **משיכה** (pull), שמוגדרת לפי:

$$z_i = \frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i} \qquad (5.27)$$

או, במלים אחרות: השארית בנקודה, מחולקת ב-σ_i שהיא האי-ודאות של המדידה ה-i.

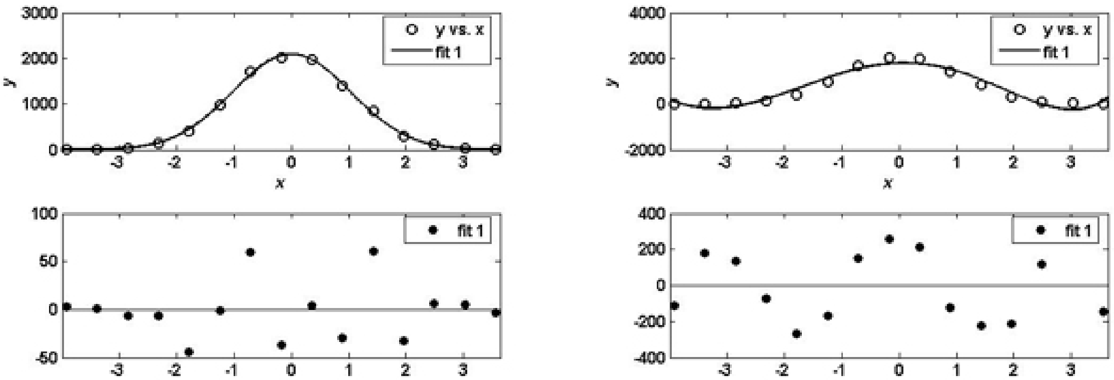
התאמה טובה היא התאמה שעוברת כמה שיותר קרוב למדידות, בתוך טווח האי-ודאות של כל מדידה. לכן, עבור התאמה טובה המשיכה של כל מדידה תהיה:

$$z_i \approx 1 \qquad (5.28)$$

אם ההתאמה טובה, נצפה שבנקודות מסוימות הערכים שמתקבלים מההתאמה יהיו קצת יותר גבוהים מהמדידות, ובנקודות אחרות – קצת יותר נמוכים. בסך הכל, נצפה ש:

- הערך הממוצע של השארים יהיה אפס.
- השארים יתפלגו מסביב לערך הממוצע בצורה אקראית.

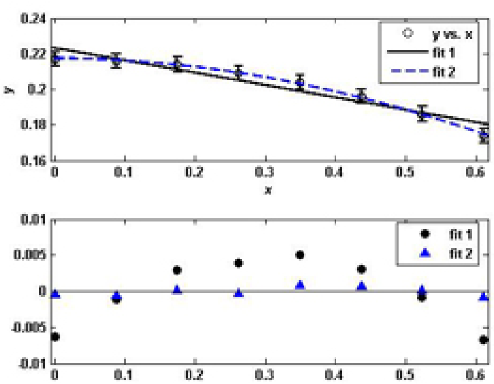
אם נראה שהערך הממוצע איננו אפס, או שההתפלגות של השארים מסביב לממוצע איננה אקראית, נדע שיש בעיה כלשהי בהתאמה שלנו. אולי לא נוכל לציין מה בדיוק הבעיה בהתאמה, אבל לפחות נדע שעלינו לחפש התאמה אחרת, שתספק התפלגות שארים טובה יותר. כמו כן, אם ננסה מספר התאמות, הרי שההתאמה עם המשיכות הקטנות ביותר תהיה הטובה ביותר. נדגים זאת בתרשימים הבאים.



תרשים 5.4. המדידות בתרשים הימני ובתרשים השמאלי הן אותן המדידות, אך בכל תרשים ניסינו התאמה שונה.

<u>ימין:</u> התאמנו למדידות פולינום מדרגה 5 ($y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$). במבט ראשון ההתאמה נראית טוב – חלק מהמדידות נמצאות מעל ההתאמה, וחלק מתחת, ואין נקודות שמאד רחוקות מהקו. חישוב טיב ההתאמה מניב $\chi^2_{red} = 0.902$ לדרגת חופש, די קרוב ל-$\chi^2_{red} = 1$ שהיינו רוצים לקבל. אבל בחינה מדוקדקת יותר של החלק העליון בתרשים מגלה שיתכן שיש **חוקיות** בפיזור המדידות מסביב להתאמה. נראה שיש קבוצה של מדידות מעל הקו, אחר-כך מתחת לקו, שוב מעל הקו וחוזר חלילה. כאשר בוחנים את השארים בחלק התחתון של התרשים מגלים שהם אמנם מפולגים מסביב לאפס, אבל לא רק שיש חוקיות בפיזור המדידות, אלא שהיא אפילו מחזורית. מכאן שהשארים לא מפולגים בצורה אקראית, ולכן למרות ש-χ^2_{red} היה טוב, עלינו לחפש התאמה אחרת.

<u>שמאל:</u> לאותן המדידות התאמנו גאוסיאן. כפי שניתן לראות, הפעם השארים מפולגים בצורה אקראית למדי מסביב לאפס, ומכאן ניתן להסיק שאין בעיה מיוחדת בהתאמה זו.



תרשים 5.5. את ההתאמה הראשונה (הקו הרציף) יכולנו לפסול גם בגלל שהשארים שלו (העיגולים) לא מפולגים אקראית מסביב לאפס, וגם בגלל שלרוב המדידות יש משיכה חיובית, בעוד שאם ההתאמה הייתה טובה, היינו מצפים שרק לכמחצית מהמדידות תהיה משיכה חיובית. ההתאמה השנייה (הקו השבור) הרבה יותר טובה: לאף מדידה אין משיכה יוצאת דופן; היא עוברת דרך שתי הנקודות הקיצוניות ביותר, בעוד שלהתאמה הראשונה יש שם משיכה לא מבוטלת; השארים (המשולשים) מפולגים בצורה אקראית מסביב לאפס, והם הרבה יותר קרובים לאפס מהשארים של ההתאמה הראשונה.

5.4. ריבועים מינימליים עם אי-ודאויות בשני הצירים

על אף שקיים פתרון אנליטי לבעיה הנ״ל, הוא מוגבל להתאמות ליניאריות ורק למקרה הפרטי בו האי-ודאויות קבועות בשני הצירים. מי שרוצה יכול לקרוא על שיטה זו בפרק 6.5 בספרו של Barlow. היות וזהו פתרון מוגבל, במעבדה א׳ אנו נשתמש בשיטה נומרית כדי למצוא את ההתאמה הטובה ביותר. מה ההבדל בין פתרון אנליטי לפתרון נומרי? פתרון אנליטי הוא פתרון בצורת משוואה סגורה. למשל, אנו יודעים שכדי למצוא את השורשים של פולינום מדרגה שניה $y = ax^2 + bx + c$, כל שעלינו לעשות הוא להציב את המקדמים a, b, c בביטוי:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{5.29}$$

אך לא לכל הבעיות קיים פתרון אנליטי, אם בגלל שפתרון שכזה טרם התגלה, או כיוון שהוא פשוט לא קיים. במקרים כאלה אנו פונים לפתרונות נומריים: אלגוריתמים שבנויים מצעדי חישוב שונים, בעזרתם משתדלים להתקרב לתוצאה ככל האפשר.

במקרים בהם תצטרכו להשתמש בשיטת הריבועים המינימליים כדי לבצע התאמה לא-ליניארית, או במקרים בהם למדידות יהיו אי-ודאויות בשני הצירים, תעשו שימוש בתוכנית מיוחדת שנכתבה בסביבת Matlab. תוכנית זו מבוססת על שיטת לֶבֶנְבֶּרְג-מַרְקָה (Levenberg-Marquardt). לא נתאר אותה כאן בפרוטרוט, אך נסתפק בתיאור כללי של שלבי הפתרון:

1. האלגוריתם מקבל כקלט את צורת ההתאמה וניחוש ראשוני של ערכי הפרמטרים.
2. האלגוריתם מחשב את χ^2_{red} בין המדידות לבין הפונקציה עם הפרמטרים של הניחוש.
3. האלגוריתם מזיז את הפרמטרים של הפונקציה במידה שנקבעה מראש ($a + \Delta a$, $b + \Delta b$ וכן הלאה) ומחשב את χ^2_{red} עבור הפרמטרים החדשים.
4. האלגוריתם משווה בין χ^2_{red} מהניחוש המקורי לבין χ^2_{red} משלב 3.
5. האלגוריתם ימשיך להסיט את ערכי הפרמטרים ולחשב את χ^2_{red} , עד שהוא ימצא את ערכי הפרמטרים שמניבים χ^2_{red} מינימאלי.

האי-ודאויות של ערכי המשתנה בציר x נכנסות להתאמת ה- χ^2 . משוואה (5.3) תהפוך ל:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{y_i - f(x_i\,;a)}{\sqrt{(\sigma_i^y)^2 + \left(f(x_i + \sigma_i^x\,;a) - f(x_i - \sigma_i^x\,;a)\right)^2}}\right]^2 \tag{5.30}$$

כאשר σ_i^y היא האי-ודאות של המדידה ה-i בציר y ו- σ_i^x היא האי-ודאות של המדידה ה-i בציר x. כיוון ששיטת הריבועים המינימליים בודקת את המרחק בין המדידות לבין ההתאמה בציר y, לא השתמשנו ב- σ_i^x כמו שהיא, אלא בהשפעה שלה על ערך המדידה בציר y. כמו כן, חיברנו את ערכי האי-ודאות בריבוע, בהתאם למשוואה (2.19).

5.5. נראות מירבית

שיטת הנראות המירבית (**Maximal Likelihood**) הינה שיטה כללית יותר משיטת הריבועים המינימליים, והיא מספקת תוצרים מעט שונים והרבה יותר חזקים. בשיטה זו אנו מניחים שכל מדידה מקורה בפונקצית התפלגות הסתברות מוכרת לנו $p(x_i, a)$, כאשר x_i היא המדידה ה-i-ו a סט הפרמטרים שמגדירים את הפונקציה. נגדיר גודל חדש בשם הנראות:

$$L = \prod_{i=1}^{N} p(x_i, a) \tag{5.31}$$

כלומר, הנראות היא מכפלת ההסתברויות של כל נקודת מדידה. מייד ניתן לראות שהנראות תלויה בצורה חזקה מאד בפונקציית התפלגות ההסתברות שבחרנו. כך, בעזרת שיטה זו נוכל למצוא לא רק את הפרמטרים הסבירים ביותר עבור פונקצית התפלגות מסוימת, בהינתן המדידות, אלא גם את פונקצית התפלגות ההסתברות הסבירה ביותר למדידות שלנו.

כיוון שלא נוח לעבוד עם מכפלות, נפעיל על L את הלוגריתם הטבעי:

$$\ln L = \sum_{i=1}^{N} \ln p(x_i, a) \tag{5.32}$$

האומדנים הסבירים ביותר לפרמטרים יתקבלו כאשר הנראות L תהיה מקסימלית. על כן, בדומה לשיטת הריבועים המינימליים, נגזור את $\ln L$ ונמצא את ערכי הפרמטרים שנותנים לנו מקסימום:

$$\left.\frac{d \ln L}{da}\right|_{a=\hat{a}} = 0 \tag{5.33}$$

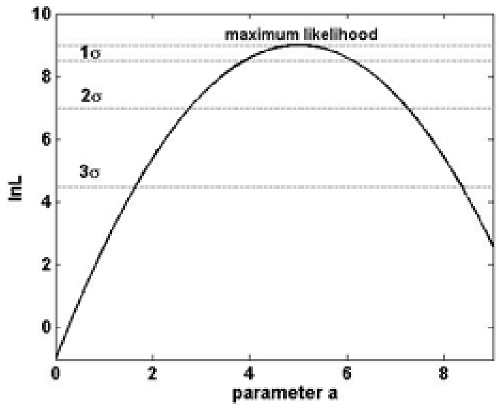
נדגים זאת על ההתפלגות הגאוסיאנית. לשם הכללה, נניח שכל המדידות מגיעות מהתפלגות גאוסיאנית עם אותו הערך של μ, אך לכל מדידה יש אי-ודאות משלה, כלומר היא מגיעה מהתפלגות עם σ_i שונה, אך מוכרת:

$$\begin{aligned}
L &= \prod_{i=1}^{N} p(x_i; \mu, \sigma_i) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2{\sigma_i}^2}\right] \\
\ln L &= -\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma_i\right) - \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i-\mu)^2}{2{\sigma_i}^2} \\
\left.\frac{d \ln L}{d\mu}\right| &= -\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i-\mu}{{\sigma_i}^2} \\
\Rightarrow \hat{\mu} &= \frac{\sum\left(x_i/\sigma_i^2\right)}{\sum\left(1/\sigma_i^2\right)}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

בעצם, קיבלנו שהאומדן הטוב ביותר ל- μ הוא הממוצע המשוקלל שחישבנו, בצורה אינטואיטיבית, במשוואה (4.31).

את הביטוי במשוואה (5.25) היה קל לגזור, אך במקרים רבים יהיה קל יותר לשרטט עקומה של $\ln L$ כפונקציה של ניחושים שונים עבור הפרמטר שאנו מחפשים. כך, בצורה גרפית, נוכל לזהות

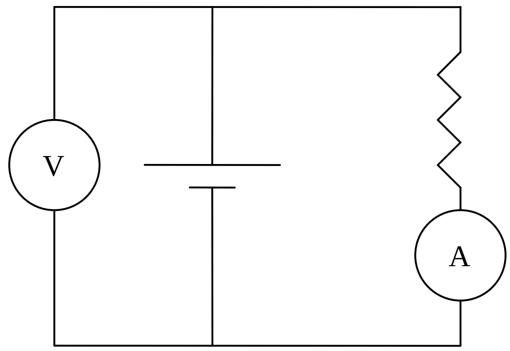
את נקודת המקסימום ולקחת ממנה את הערך הסביר ביותר של הפרמטר אותו אנו מחפשים. מתוך הגרף הזה נוכל גם לגזור בקלות את תחומי האי-ודאות של הפרמטר: התחום שמקביל ל-1σ בהתפלגות הגאוסיאנית הוא נקודות החיתוך של העקומה כאשר מחסירים 1/2 מהערך במקסימום. באופן דומה, הערכים של 2σ מתקבלים כשמחסירים 2 מהערך המקסימלי, ו-3σ כשמחסירים 4.5.



תרשים 5.6. דוגמה לחישוב אומדן עבור הפרמטר a בעזרת שיטת הנראות המירבית. נקודת המקסימום של התרשים היא האפשרות הסבירה ביותר עבור האומדן, ונקודות החיתוך של התרשים עם הקווים המקווקווים מספקים את תחומי האי-ודאות המתאימים ל- 1σ, 2σ ו- 3σ.

6. טיפול בשגיאות שיטתיות

אין דבר מפחיד יותר משגיאות שיטתיות. בניגוד לאי-ודאויות אקראיות, ההשפעה שלהן לא ניכרת לעין בצורה מיידית: היא לא גורמת להרחבה של האי-ודאות וברוב המקרים היא גם לא משנה את אופיו של הקשר הפיזיקלי. נניח, למשל, שאנו רוצים לגלות האם קיימת תלות בין המתח שאנו מספקים למעגל חשמלי לבין הזרם החשמלי שזורם בו. כדי לעשות זאת, אנו מחברים מעגל חשמלי שכולל מקור מתח, נגד, מד-זרם (אמפרמטר) ומד-מתח (וולטמטר).



תרשים 6.1. מעגל חשמלי פשוט ובו מקור מתח, נגד (הקו המסולסל), וולטמטר (מסומן ב-V) ואמפרמטר (מסומן ב-A). שימו לב לצורה בה מכשירי המדידה מחוברים.

אנו יודעים את האי-ודאויות של שני מכשירי המדידה. אנו עורכים מספר מדידות, מציגים אותן על גרף ומנסים התאמות שונות. לשמחתנו, אנו מגלים שההתאמה הטובה ביותר היא קו ישר, כפי שציפינו מהתיאוריה של חוקי אוהם. אבל כאן, בלי להרגיש, יתכן שהתגנבו להם שני סוגים של שגיאות שיטתיות:

א. יתכן מאד שפעילות מכשירי המדידה תלויה בטמפרטורה. אם לא ידענו זאת, ולא כיילנו את מכשירי המדידה בהתאם, יתכן מאד שהקריאה שלהם לא התחילה מאפס, אלא מערך אחר. זה יגרום לכך שהשיפוע של הקו הישר יהיה מוטעה.

ב. כדי לחבר את המעגל החשמלי היה עלינו להשתמש בכבלים מוליכים. כמו כל חומר אחר, גם להם יש התנגדות חשמלית כלשהי. אם לא חשבנו על כך מראש, ובמקרה בחרנו נגד שהתנגדותו שקולה להתנגדות הכבלים, הרי שהזרם שנמדוד יהיה קטן מהזרם שציפינו למדוד. שגיאה זו תשפיע על ערכו של שיפוע הגרף, אך ההתאמה הטובה ביותר עדיין תהיה קו ישר.

למזלנו, בדוגמה הנ"ל לא קשה לגלות את השגיאות השיטתיות. אחרי שהתרגשותנו מכך שההתאמה הטובה ביותר למדידות היא קו ישר תדעך מעט, הצעד הבא יהיה לחשב את ערך השיפוע ולהשוות אותו, כצפוי מחוק אוהם, לערך הנגד.

$$V = IR \tag{6.1}$$

כאשר V הוא המתח במעגל; I – זרם ו-R – התנגדות הנגד.

כאן, להפתעתנו, נגלה שהתוצאות אינן תואמות. אם הניסוי שלנו לא מדויק מספיק, יתכן מאד שהאי-ודאות של השיפוע תהיה מספיק גדולה להכיל את הערך התיאורטי, ואנו נחשוב, בטעות,

שהניסוי הצליח. אך אם הניסוי שלנו מספיק מדויק, נראה מיד שקיימת סטייה בין ערך השיפוע לבין ערך הנגד.

במקרה כזה יש לחזור ולבחון את הניסוי. נזכרתם ששכחתם לכייל את מכשירי המדידה, ולכן אתם חוזרים על הניסוי פעם נוספת. אם יש לכם מזל, התוצאה החדשה עדיין לא תתאים לתיאוריה, ותצטרכו לחזור ולבחון את הניסוי פעם נוספת. אז אולי תחשבו על התנגדות הכבלים. אם התוצאה החדשה כבר תכיל את הערך התיאורטי, יתכן שלעולם לא תגלו את השגיאה השיטתית הנוספת.

במקרה הנ״ל יכולנו לגלות את השגיאות השיטתיות, כיוון שסמכנו על התיאוריה שהניסוי בדק. את חוק אוהם למדנו עוד בתיכון, ואין לנו שום סיבה נראית לעין לחשוד בו. לכן, כאשר התוצאה שלנו סטתה מהערך שנחזה על-ידי התיאוריה, חשדנו בניסוי שלנו. בחזית המחקר, כאשר מטרתם של ניסויים איננה לאמת תיאוריה מוכרת, אלא לבחון מספר תיאוריות שונות שמנסות לתאר את אותה התופעה, אין לנו רשת הגנה. במקרה כזה הרבה יותר קשה לגלות שגיאות שיטתיות, וההשפעה שלהן יכולה להיות הרסנית. אם לא היינו חושדים בניסוי שלנו, אלא בחוק אוהם עצמו, הרי שהיינו עלולים להסיק מתוצאות הניסוי שחוק אוהם איננו מספיק מדויק, ושבנוסף לנגד, הזרם והמתח במעגל תלויים בגורם נוסף. כיוון שבמבט ראשון לא היינו מצליחים לגלות מקור התנגדות נוסף במעגל (הרי לא שמנו לב שלכבלים יש התנגדות), אולי היינו ממציאים מונח חדש - ״התנגדות אפלה״ - ופותחים תחום מחקר חדש ומרתק.

בכל זאת, יש מספר דרכים לנסות ולהימנע משגיאות שיטתיות:

א. פרנויה: תמיד תחשדו בניסוי, ותמיד תחשדו בעצמכם.

ב. הכירו את המכשירים בהם אתם משתמשים. וודאו שאתם יודעים לא רק איך מכשירי המדידה השונים עובדים, אלא גם איך הרכיבים האחרים בניסוי עובדים. בדוגמה למעלה, למשל, הרבה עצב היה נחסך אם מבצעי הניסוי היו יודעים שגם לכבלים יש התנגדות, והיו חושבים למדוד אותה.

ג. היזהרו משיגרה. אם אתם צריכים לאסוף חמישים מדידות של גודל מסוים, ובין מדידה למדידה עליכם לחכות בדיוק חמש שניות, עדיף שיותר מאדם אחד יבצע את המדידות. חזרה על אותה פעולה פעם אחר פעם עלולה להוביל להתקהות חושים. אחרי מספר מדידות, יתכן שבמקום לחכות חמש שניות, הניסיונאי כבר לא ישים לב ויחכה שבע שניות, ואחרי מספר נוסף של מדידות, זמן ההמתנה יתארך לתשע שניות, וכן הלאה. אם תחלקו את המדידות ביניכם, בצורה אקראית, יתכן שעדיין לא תחכו בדיוק חמש שניות בין מדידה למדידה, אבל לפחות השגיאות שתכניסו יהיו אקראיות. בצורה הזאת תהפכו את השגיאה השיטתית לאי-ודאות אקראית בה אתם כבר יודעים לטפל.

ד. מדידות אקראיות. אם צריך לבצע מדידות בטווח מסוים, נניח מ-20V עד ל-80V, עדיף למדוד בטמפרטורות אקראיות בתוך הטווח, ולא למדוד בצורה ליניארית מקצה אחד לקצה השני. למה זה טוב? נניח שהוולטמטר בדוגמה הנ״ל תלוי בטמפרטורת החדר. כיוון שלמדתם את המכשיר לפני שהתחלתם את הניסוי, אתם יודעים זאת וכיילתם אותו בתחילת המדידות. את המדידות התחלתם בשמונה בבוקר, וסיימתם אותן בעשר בבוקר. בינתיים השמש עלתה

גבוה יותר בשמים והטמפרטורה בחדר עלתה. שימו לב: הטמפרטורה השתנתה בכיוון אחד בלבד, ולא בצורה אקראית. לכן, גם קריאת הוולטמטר השתנתה בכיוון אחד בלבד, והכניסה שגיאה שיטתית. אך אם דאגתם למדוד ערכי מתח אקראיים, הרי ששוב הפכתם את השגיאה השיטתית לאי-ודאות אקראית.

ה. מהי מטרת המדידה? שימו לב איזה סוג של גודל אתם מודדים. נניח שאתם מודדים את גובהם של כל החתולים בקמפוס. לשם כך אתם משתמשים בסרגל, ולא שמתם לב שהוא לא מתחיל מאפס, אלא מ-0.1 cm. לכן, הכנסתם שגיאה שיטתית לגובהם של כל החתולים. אם אתם מעוניינים בגובה המוחלט של כל חתול, הרי שיש לכם בעיה. אבל אם, לעומת זאת, אתם מתעניינים בהפרשי הגבהים בין החתולים, הרי שבכל פעם שתחסירו את גובהו של חתול אחד מגובהו של חתול אחר, השגיאה השיטתית תתבטל מעצמה.

ו. מדידה מלמעלה ומלמטה. ישנם גדלים מסוימים שתוכלו למדוד מלמעלה או מלמטה. נניח, למשל, שמדדתם את התנודות של מטוטלת פיזיקלית, ועל צג המחשב מופיע תרשים סינויסוידלי של התנודות. אתם רוצים למדוד את גובה השיאים השונים. אתם יודעים שלמכשיר המדידה יש רזולוציה מוגדרת, ושאין שום סיבה שהוא ימדוד בדיוק את השיא בכל פעם. בגלל אופיו הדיגיטלי של המכשיר, אם תנסו להתקרב לנקודת השיא מימין, יתכן שתקבלו ערך שונה מאשר אם תנסו להתקרב לנקודת השיא משמאל. אם תחליטו תמיד להתקרב מצד אחד בלבד, יתכן מאד שתכניסו שגיאה שיטתית לניסוי, ולכן עדיף לשמור על אקראיות: לפעמים למדוד משמאל, ולפעמים מימין.

6.1. האי-ודאות האקראית של השגיאה השיטתית

אם הרבה שכל וקצת מזל, גילינו מספר שגיאות שיטתיות בניסוי שלנו וטיפלנו בהן בהתאם לצעדים שהוזכרו לעיל. אבל חלק מהצעדים הללו גוררים אי-ודאויות משלהם. למשל, צריך לשים לב כיצד מכיילים את מכשירי המדידה. אם זה נעשה בעזרת מדידה כלשהי, אזי אנו מוסיפים אי-ודאות נוספת לאי-ודאות הבסיסית של מכשיר המדידה. כשהחסרנו את גבהי החתולים, אמנם נפטרנו מהשגיאה השיטתית בגובה, אך היינו צריכים לחשב את האי-ודאות של הפרש הגבהים בהתאם לטבלה 4.1. לכן, שוב, יש לשמור על עירנות ולבדוק אילו אי-ודאויות נכנסות כאשר אנו מטפלים בשגיאות השיטתיות.

סיכום

בחוברת זו הצגנו את הכלים הסטטיסטיים הבסיסיים שנחוצים לכם על-מנת להבין ולהשתמש במדידות שתבצעו במעבדה א'. קיבלתם טעימה קטנה מאד מהעולם העשיר והמרתק של הסטטיסטיקה המודרנית. זהו אחד התחומים התוססים ביותר במתמטיקה, הן בגלל שהוא עדיין יחסית חדש והן בגלל שהוא מתממשק בצורה ישירה למדעים המדויקים השונים. לא מעט מהשיטות ומהמשפטים הסטטיסטיים נכתבו (וממשיכים להיכתב) על-ידי פיזיקאים, בגיולוגים וכימאים. אנו מקווים שחוברת זו, מעבר למשוואות ולתרשימים שאולי יעזרו לכם ביום-יום, הצליחה להעביר שלוש נקודות עיקריות:

1. העולם הוא מקום מורכב ועשיר. כפזיקאים, אנו מנסים להבין את אופן פעולתו בעזרת ניסויים. כדי להבין את תוצאות הניסויים, עלינו להבין כיצד אנו מבצעים מדידות, וכיצד אנו יכולים ולא יכולים להשתמש בהן.
2. כל ניסוי הוא ייחודי, ולכן כל ניסוי עשוי לדרוש כלים סטטיסטיים משלו. אנו תיארנו חלק מהכלים הנפוצים ביותר, אך קיימים עוד רבים נוספים. בכל ניסוי עליכם להתאים את המדידות לכלים הסטטיסטיים שעומדים לרשותכם, או לחפש כלים סטטיסטיים חדשים. אף פעם אל תנסו להשתמש בכלי סטטיסטי שאינו מותאם למדידות.
3. קל מאד לשקר בעזרת סטטיסטיקה. לא נגענו בנקודה זו, אבל מי שמתעניין יוכל למצוא ספרים שלמים שעוסקים בנושא. קל מאד להשתמש בכלים הסטטיסטיים הלא נכונים, בכוונה, כדי לקבל את התוצאות שרוצים לקבל. קל מאד להסתיר פגמים בניסוי או לסובב את משמעות התוצאות בכך שלא מדווחים תוצאות מסוימות (כמו התפלגויות שארים, למשל). כפיזיקאים טובים, שימרו על שקיפות: הסבירו באילו כלים סטטיסטיים השתמשתם ומה היו תוצאותיהם; דאגו לכתוב בצורה הברורה, התמציתית והמלאה ביותר, על-מנת שהקורא יוכל להבין בדיוק מה עשיתם ומהי משמעות התוצאות שקיבלתם.

אנו מקווים שהפקתם תועלת מחוברת זו, ולכן נחזור על בקשתנו מהמבוא: החוברת הזאת היא לשימושכם, ולכן עליה להיות ברורה, מקיפה ושימושית. כדי שנוכל להמשיך ולשפר אותה, אנא הפנו כל בעיה, טענה, דרישה או המלצה לצוות המעבדה. תודה, ובהצלחה בניסויים.