שיטות 2 - סיכום

I פונקציות Green

ישנן שתי דרכים להגדיר את פונקצית גרין. נתחיל קודם ונאמר שפונקצית גרין היא בעצם ההפכי של האופרטור $\hat{L}$, כאשר בד"כ אנחנו מדברים על אופרטורים הרמיטיים.
נמשיך ונאמר שלכל אופרטור $\hat{L}$ אפשר להגדיר פונקצית גרין, רק אם לאותו אופרטור אין פונקציה עצמית ששונה מאפס שנובעת מערך-עצמי ששווה לאפס. לדוגמה, נסתכל על האופרטור $\hat{L} = -\frac{d^2}{dx^2}$ שפועל על מרחב הפונקציות בקטע $[0,L]$ שמקיימות $f_n(0)=f_n(L)=1$. במקרה הזה הפונקציות העצמיות יהיו $f_n=\cos(\frac{2\pi n}{L}x)$, כאשר $\sqrt{\lambda_n}=\frac{2\pi n}{L}$.
במקרה הזה רואים שעבור $n=0$ מקבלים $f_0=1$, $\lambda_0=0$ ולכן אי-אפשר להגדיר פונקצית גרין. במקרים כאלה "מתקנים" את האופרטור בצורה כזאת בהמשך.

I הגדרה 1

זו ההגדרה הכללית ביותר של פונקצית גרין:
$$\boxed{\hat{L}G(\bar{r}_1,\bar{r}_2) = -\delta(\bar{r}_1-\bar{r}_2)}$$
מפה נגיע למה שיותר חשוב - איך לחשב את הפונקציה. השיטה השלמה יוצאת מתוך ההנחה שאנחנו מכירים את הפונקציות העצמיות f_n של האופרטור $\hat{L}$ ואת הערכים העצמיים λ_n.
במקרה הזה אפשר פשוט לכתוב: עבור המשוואה הכללית: $\hat{L}\psi(r) = -\rho(r)$
כאשר הערכים העצמיים מוגדרים: $\hat{L} f_n(r) = -\lambda_n^2 f_n(r)$
$$G(\bar{r}_1,\bar{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(r_1)f_n(r_2)}{\lambda_n^2}$$
אבל, אנחנו אומרים שלא תמיד אפשר לפתח פונקצית גרין עבור $\hat{L}$ ובמקרה הזה מתקנים את הפונקציה. איך? מוסיפים אקבוע לאופרטור: $(\hat{L}+c)\psi(r) = -\rho(r)$
ואז מקבלים את הצורה הכללית:
$$\boxed{G(\bar{r}_1,\bar{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(r_1)f_n(r_2)}{\lambda_n^2 + c}}$$

II הגדרה 2

ההגדרה השנייה לא מניחה שאנו מכירים את הפונקציות העצמיות, ומתבססת על חישוב:
1) מסתכלים על תחום מסוים (a,b) ועל נקודה t בתוך תחום זה. $G(x,t)$ תורכב משתי פונקציות: $G_1(x)$ עבור $x<t$ ו- $G_2(x)$ עבור $x>t$.
2) מקבלים אופרטור כלשהו $\hat{L}$ שפועל על הפונקציה הכללית $y(x)$. פותרים את המשוואה ההומוגנית $\hat{L}y(x)=0$. נצטרך שמספר הפתרונות בדרגת האופרטור.
3) מרכיבים את $G(x)$ מהפתרונות, כאשר כל פתרון מתאים לחלק מהתחומים $x>t$ או $x<t$.
4) מקיימים שני תנאים: רציפות הפונקציה: $\lim_{x\to t^-}G_1(x) - \lim_{x\to t^+}G_2(x) = 0$
$\{L = \frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}+q(x)\}$ אי-רציפות הנגזרת: $\frac{d}{dx}G_2(x)|_t - \frac{d}{dx}G_1(x)|_t = -\frac{1}{p(t)}$

בעזרת שני התנאים הללו מוצאים את הקבועים c_1, c_2 ומציבים חזרה ל- $G(x)$.

5) נשים לב שצריכה להיות סימטריה בין $G_1(x)$ לבין $G_2(x)$.

דוגמה: $*)\ \mathcal{L}y(x) = \frac{d^2}{dx^2}y(x) - y(x)$; $y(x)$ finite for $-\infty < x < \infty$

1 $\mathcal{L}y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_1 e^{x} + c_1 e^{-x}$

2 $\Rightarrow \quad G(x,t) = \begin{cases} c_1 e^{x} & x<t \\ c_2 e^{-x} & x>t \end{cases}$ רק 'יתקיימו' תנאי השפה והפונקציה תהיה סופית עבור כל x.

3 רציפות: $c_2 e^{-t} - c_1 e^{t} = 0$

אי-רציפות הנגזרת: $-c_2 e^{-t} - c_1 e^{t} = -1$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \quad c_1 = \tfrac{1}{2}e^{-t}, \quad c_2 = \tfrac{1}{2}e^{t}$$

4 $\Rightarrow \quad G(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t}e^{x} & x<t \\ \frac{1}{2}e^{t}e^{-x} & x>t \end{cases}$ ונשים לב לסימטריה.

III שימושים

ברגע שיודעים את פונקציית הגרין של האופרטור, אפשר להשתמש בה כדי לפתור באופן מיידי את המד"ר הלא-הומוגנית של אותו אופרטור.

עבור המד"ר הכללית: $\hat{\mathcal{L}}\psi(x) = -f(x)$

הפתרון הוא: $\boxed{\psi(x) = \int G(x,x')f(x')dx'}$

דוגמה: תחום $(0,L)$: $*)\ \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 1\right)\psi(x) = x\cos(x)$

1 $G(x,x') = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\frac{2\pi n}{L}x)\cos(\frac{2\pi n}{L}x')}{(\frac{2\pi n}{L})^2 + 1}$

2 $\psi(x) = \int_0^L \left[-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\frac{2\pi n}{L}x)\cos(\frac{2\pi n}{L}x')}{(\frac{2\pi n}{L})^2+1}\right] x'\cos(x')dx' = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[-\int_0^L dx' \frac{\cos(\frac{2\pi n}{L}x')x'\cos(x')}{(\frac{2\pi n}{L})^2+1}\right]}_{\equiv a_n} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$

$\Rightarrow \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$

II הרמוניות ספריות

I פונקציות על כדור

נתחיל בפרק שלנו על פונקציה של (θ,φ) היא פונקציה על הכדור. בנקודה מסוימת על הכדור לפונקציה צריך להיות ערך אחד בלבד. לכן φ צריכה להיות מחזורית ב- 2π.

בעיה נוספת היא ש-φ לא מוגדר בקוטב הצפוני של הכדור (0 או 2π ?). בפתרון אפשר היה ליצור פונקציה כמו $\sin\theta\sin\varphi$ שמציעה שלום בקוטב הצפוני.

נגדיר עכשיו שני אופרטורים קריטיים: הלפלסיאן ו- D^2.

הלפלסיאן בקואורדינטות כדוריות: $\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$

$$\boxed{D^2\equiv\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}}$$

$$\boxed{\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}D^2(\theta,\varphi)}$$

נגדיר מכפלה פנימית על הכדור:

$$(f,g)=\int f^*(\Omega)g(\Omega)d\Omega$$

כאשר Ω היא הזווית המרחבית:

$$d\Omega=\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

II האופרטור D^2

כיון שחלק גדול מהמקרים בפיזיקה כוללים לפלסיאנים, D^2 הופך לאופרטור מאוד חשוב על הכדור.

כמו שאם לעזור מפונקציות פרק, הדבר הכי חשוב באופרטור הוא הערכים העצמיים והפונקציות העצמיות שלו. D^2 תלוי גם ב-θ וגם ב-φ ולכן הפונקציות העצמיות שלו מורכבות מ- $\Phi(\varphi)$ ומ- $\Theta(\theta)$. הפתרון במשוואה $D^2\Theta\Phi=-\lambda\Theta\Phi$ נותן לנו:

כאשר m הוא מס' שלם, על-מנת להיות מחזוריות ב-φ:

$$\Phi(\varphi)=e^{im\varphi}$$

משוואת לז'נדר המוכללת:

$$\Theta(x)=P_l^m(x)=\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l$$

הפונקציות העצמיות של D^2 הן פונקציות שנקראות Y_l^m ומורכבות מ- $\Phi(\varphi)$ ומ- $\Theta(x)$:

$$\boxed{Y_l^m(\Omega)\equiv Y_l^m(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}}$$

הערכים העצמיים הם כמו הערכים העצמיים של משוואת לז'נדר:

$$\boxed{\lambda=-l(l+1)}$$

ומכאן מגיעים לאחד הקשרים החשובים ביותר בחלק זה:

$$\boxed{D^2Y_l^m=-l(l+1)Y_l^m}$$

זה חשוב על עצמו אבל חוקי זה חובה לזכור את זה.

III תכונות של Y_l^m

$Y_0^0=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$Y_1^{-1}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$	$Y_2^0=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)$
$Y_1^1=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}$	$Y_2^2=\sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta e^{2i\varphi}$	$Y_2^{-1}=\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta e^{-i\varphi}$
$Y_1^0=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$	$Y_2^1=-\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi}$	$Y_2^{-2}=\sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta e^{-2i\varphi}$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} dx\, P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{l,l'}$$

$$\Rightarrow \int d\Omega\, Y_l^m(\Omega) Y_{l'}^{m'*}(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, Y_l^m(\theta,\varphi) Y_{l'}^{m'*}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

פונקצית δ על הכדור:

$$\Rightarrow \boxed{\delta(\Omega,\Omega') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^{m*}(\Omega') Y_l^m(\Omega)}$$

<u>כל פונקציה על הכדור $f(\theta,\varphi)$ אפשר לפתח בבסיס של Y_l^m היות והם אורתונורמלים</u>

שלם, זה מאוד מאוד חשוב:

$$\boxed{\begin{aligned} f(\theta,\varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_l^m(\theta,\varphi) \\ a_{lm} &= \int d\Omega\, f(\theta,\varphi) Y_l^{m*} \end{aligned}}$$

גם את Y_l^m אפשר לפתח בבסיס Y_l^m:

$$\Rightarrow Y_l^m(\theta,\varphi) = \sum_{m'=-l}^{l} a_{m'm} Y_l^{m'}(\theta',\varphi')$$

IV <u>משוואות על הכדור</u>

כאן יש לנו אלגוריתם בחמש לפתרון מד"ים על הכדור, והוא מתבסס על $D^2Y_l^m = -l(l+1)Y_l^m$,

נתאר את האלגוריתם בעזרת דוגמה:

$$(*)\quad i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi$$

1 על-פני הכדור הלפלסיאן יהפוך ל-D^2, עם R^2 (רדיוס הכדור) במכנה, כך:

לכן יתקבל:

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2mR^2} D^2\psi$$

2 <u>מפתחים את ψ בבסיס הפונקציות העצמיות של D^2</u>:

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}(t) Y_l^m(\theta,\varphi)$$

3 <u>מציבים חזרה למד"ר</u>:

$$i\hbar \sum \frac{d a_{lm}}{dt} Y_l^m(\theta,\varphi) = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}[-l(l+1)] Y_l^m(\theta,\varphi)$$

4 ואז <u>מקבלים מד"ר פשוט על a_{lm}</u>:

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d a_{lm}}{dt} = \frac{\hbar^2}{2mR^2} l(l+1) a_{lm}$$

$$\Rightarrow a_{lm}(t) = a_{lm}(0) e^{-\frac{i\hbar}{2mR^2} l(l+1) t}$$

<u>כל מה שצריך עכשיו זה תנאי שפה ב- $t=0$ כדי לקבל את $a_{lm}(0)$</u>.

5 ואז <u>הפתרון המלא הוא</u>:

$$\psi(\Omega,t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}(0) e^{-\frac{i\hbar}{2mR^2} l(l+1) t} Y_l^m(\Omega)$$

אם יש לנו אופרטור אחר במקום D^2 פשוט צריך למצוא את הפונקציות העצמיות והערכים העצמיים שלו, ולעבוד באותה צורה.

- <u>משוואות אי-הומוגניות על הכדור</u>

האלגוריתם למעלה עובד מצוין עבור מד"ים הומוגניות. צריך להיזהר כשמדברים על משוואות אי-הומוגניות מהסוג $D^2 f = g$. נשים לב שעבור $l=0$ הערך העצמי של D^2 אפס, אבל הפונקציה העצמית היא הקבוע $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$. מה זה אומר?

בכלל, נפתח את g בבסיס Y_l^m: $g=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} b_{lm}Y_l^m(\Omega)$. אם ל-$g$ יש

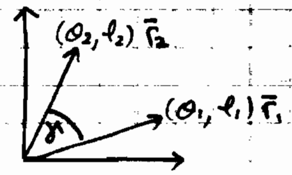
רכיב $(0,0)$ - כלומר קיים b_{lm} עבור $l=0$ - אז למשוואה $\nabla^2 f=g$ אין פתרון.

אם ל-g אין רכיב $(0,0)$ אז למשוואה יש אינסוף פתרונות.

נשים לב שזה גם אומר של-∇^2 אין פונקציית גרין. אם נרצה פונקציית גרין נצטרך לקחת

את האופרטור: $\hat{L}=\nabla^2+c$:
$$G(\Omega,\Omega') = -\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^{m*}(\Omega')\frac{1}{l(l+1)+c}Y_l^m(\Omega)$$

V משפט החיבור והפיתוח המולטיפולי



יש לנו שני כיוונים עם זווית γ ביניהם. ניתן לבטא את הזווית הזו בעזרת ההרמוניות הספריות של שני הכיוונים:

$$\boxed{P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta_1,\varphi_1)Y_l^{m*}(\theta_2,\varphi_2)}$$

בעזרת משפט החיבור ניתן להבין (תרגיל 4) את הפיתוח המולטיפולי של $\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$,

פיתוח שימושי מאוד באלקטרוסטטיקה: $r_< \equiv \min(r_1,r_2)$; $r_> \equiv \max(r_1,r_2)$

$$\boxed{\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_l^m(\theta_1,\varphi_1)Y_l^{m*}(\theta_2,\varphi_2)}$$

VI גופים כמעט-כדוריים

הרעיון הבסיסי הוא שאיפה שבכדור היה $r(\theta,\varphi)=R$, בכמעט-כדור $\boxed{r(\theta,\varphi)=R[1+\epsilon f(\theta,\varphi)]}$

את $f(\theta,\varphi)$ מפתחים על המעגל:
$$\boxed{r = R\left[1+\epsilon\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}Y_l^m(\Omega)\right]}$$

הסכימה על l מתחילה באחד, ולא באפס. את הביטוי הזה לרדיוס מציבים לתוך הביטויים אותם

מחפשים. לדוגמה: יש תיקונים נוספים, עקב הצורה הגאומטרית:

שטח-פנים של גוף כמעט-כדורי: $S=\int d\Omega\left[r^2(\theta,\varphi)-\frac{1}{2}\epsilon^2R^2 f(\theta,\varphi)\nabla^2 f(\theta,\varphi)\right]$

נפח: $V=\frac{1}{3}\int d\Omega\, r^3(\Omega)=\frac{1}{3}R^3\left[4\pi+3\epsilon^2\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}|a_{lm}|^2\right]$

III פונקציות בסל

במשוואת בסל משתמשים כדי לפתור מצבים בסימטריה גלילית. ניתן להשתמש בהן גם לסימטריות כדוריות, אלא לא נדבר על משוואות בסל ספריות. נתחיל משוואות בסל רגילות.

I משוואת בסל

בפיזיקה בעיה עם סימטריה גלילית נעשה לה הפרדת משתנים: $\psi(\vec{r})=R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$

החלק הרדיאלי של המשוואה יקיים: $r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}+(k^2r^2-m^2)R=0$

כאשר m הוא שלם. נעבור למשתנה $\boxed{x=kr}$: $\boxed{x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+(x^2-m^2)R=0}$

את המשוואה הזו פותרים בעזרת טור פרובניוס: $\boxed{R=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+k}}$

x^k הוא החזקה המובילה בטור. נשים לב שאמורים לקבל שני פתרונות את למצב. בפועל נקבל שני טורים: אחד יתחיל ב-x^k והשני יתחיל בחזקה שלילית של x ולכן יהיה סינגולרי באפס. אנחנו נשתמש רק בפתרון הפיזיקלי - זה שלא מתבדר - החזקות של x^k.

בצורה כזו מקבלים את יחס הרקורסיה: $\boxed{a_{n+2}=\frac{a_n}{(n+2+k)^2-m^2}}$

פונקציות בסל הן בעצם טור אינסופי: $\boxed{J_m(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}}$

הפונקציה היוצרת של פונקציות בסל: $g(x,t)=\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$

II יחסי רקורסיה

$$\Rightarrow\ J_n(-x)=(-1)^n J_n(x)$$

$$J_n(x)=(-1)^n J_{-n}(x)$$

$$\Rightarrow\ J_n(0)=0 \quad ; \quad J_0(0)=1$$

$$\Rightarrow\ J_{n-1}+J_{n+1}=\frac{2n}{x}J_n$$

$$J_{n-1}-J_{n+1}=2J_n'$$

$$J_{n-1}=\frac{n}{x}J_n+J_n'$$

$$J_{n+1}=\frac{n}{x}J_n-J_n'$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right]=x^n J_{n-1}(x)\\ &\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right]=-x^{-n} J_{n-1}(x)\\ &J_0'(x)=-J_1(x)\end{aligned}}$$

בעזרת שלושת היחסים האלה ניתן לפשט אינטגרלים. ראו תרגיל 8 ושאלה מס' 156

III אורתוגונליות ונרמול

1) עבור האפסים α_{nm} של J_n, בתחום $[0,a]$: $\int_0^a J_n(\frac{\alpha_{nm}}{a}\rho) J_n(\frac{\alpha_{nl}}{a}\rho)\rho d\rho = \frac{a^2}{2}[J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2 \delta_{ml}$

ולכן כל פונקציה ניתן לפרוס כך: $f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} J_n(\frac{\alpha_{nm}}{a}\rho)$

והמקדמים C_{nm} מוצגים: $C_{nm} = \frac{2}{a^2[J_{n+1}(\alpha_{nm})]^2}\int_0^a f(\rho) J_n(\frac{\alpha_{nm}}{a}\rho)\rho d\rho$

2) עבור β_{nm} בתחום $[0,a]$: $\int_0^a J_n(\frac{\beta_{nm}}{a}\rho) J_n(\frac{\beta_{nl}}{a}\rho)\rho d\rho = \frac{a^2}{2}(1-\frac{n^2}{\beta_{nm}^2})[J_n(\beta_{nm})]^2 \delta_{m,l}$

והמקדמים C_{nm} יבחרו הפעם: $C_{nm} = \frac{2}{a^2(1-n^2/\beta_{nm}^2)[J_n(\beta_{nm})]^2}\int_0^a f(\rho) J_n(\frac{\beta_{nm}}{a}\rho)\rho d\rho$

IV פונקציות נוימן

בחלקים הקודמים עסקנו עם פונקציות בסל שהוגדרו עבור m שלם. ניתן גם להגדיר פונקציות בסל עבור ν לא-שלם: $J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+\nu)!}(\frac{x}{2})^{\nu+2m}$

לפונקציות בסל הלא-שלמות יש בעיה ב- $x=0$, הן מתבדרות. לכן מוגדרות פונקצות נוימן.

תיקון: פונקציות נוימן נכנסות למשחק כשתנאי ההתחלה אינו לא מוגבלים את הרדיוס, ואז $\boxed{N_\nu(x) \equiv \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}}$

הפתרון הכללי הוא קומבינציה ליניארית של J_m ו- N_m, כאשר

N_m מתבדרת בראשית. ~~[illegible]~~

V פונקציות בסל ספריות

החלק הרדיאלי של מד"ח הנוגעים ללפלסיאן בקואורדינטות כדוריות נראה כך:

כאשר $-\ell(\ell+1)$ מגיע מהע"ע של D^2: $[\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \lambda^2 r^2 - \ell(\ell+1)]R(r)=0$

המשוואה הזו דומה מאוד למשוואת בסל, אך מסדר של $\ell+\frac{1}{2}$ במקום ℓ:

מגדירים משתנה חדש: $1\ \ R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}Z(r)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r}}[r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r} + \lambda^2 r^2 - (\ell+\tfrac{1}{2})^2]Z(r) = 0$$

$2\ \ x = \lambda r$

$$\Rightarrow Z(r) = J_{\ell+\frac{1}{2}}(\lambda_{\ell m i} r) \overset{\text{אין תלות ב-}m}{=\!=\!=} J_{\ell+\frac{1}{2}}(\lambda_{\ell j} r)$$

$$\Rightarrow R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(\lambda_{\ell j} r) \propto j_\ell(\lambda_{\ell j} r)$$

ההגדרה המלאה, עם פקטור הנרמול: $\boxed{j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(x)}$

פיתוח לטור: $\boxed{j_n(x) = 2^n x^n \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m (m+n)!}{m!(2m+2n+1)!}x^{2m}}$

עבור בסל ספריות קיימים שני קשרים חשובים:

כאשר: $\boxed{j_0 = \frac{\sin x}{x}\ ;\ n_0 = \frac{\cos x}{x}}$

$$\boxed{\begin{aligned} j_n &= (-\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^n j_0 \\ n_n &= (\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^n n_0 \end{aligned}}$$

יחסי רקורסיה של פונקציות בסל הספריות

1) $j_{n-1} + j_{n+1} = \frac{2n+1}{x} j_n$

2) $n j_{n-1} - (n+1) j_{n+1} = (2n+1) j_n'$

3) $\frac{d}{dx}\left[x^{n+1} j_n(x)\right] = x^{n+1} j_{n-1}(x)$

4) $\frac{d}{dx}\left[x^{-n} j_n(x)\right] = -x^{-n} j_{n+1}(x)$

5)

6) $j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)$

אורתוגונליות ונרמול

עבור האפסים X_{np}:

$$\int_0^a j_n\left(\frac{X_{np}}{a} r\right) j_n\left(\frac{X_{nq}}{a} r\right) r^2 dr = \frac{a^3}{2}\left[j_{n+1}(\alpha_{np})\right]^2 \delta_{p,q}$$

עבור האפסים Z_{np}:

$$\int_0^a j_n\left(\frac{Z_{np}}{a} r\right) j_n\left(\frac{Z_{nq}}{a} r\right) r^2 dr = \frac{a^3}{2}\left(1-\frac{n^2}{Z_{np}^2}\right)\left[j_n(Z_{np})\right]^2 \delta_{p,q}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} j_n(x)\, j_m(x)\, dx = \frac{\pi}{2n+1}\delta_{n,m}$$

VI שימושים של פונקציות בסל

בגליל

הפונקציות העצמיות של לפלסיאן בגליל:

$$\boxed{\psi_{lmn} = J_m\left(\frac{\alpha_{ml}}{R}\rho\right) e^{im\varphi} e^{inz}}$$

R-רדיוס הגליל; α_{ml} במקרה ותנאי השפה הוא $\psi(\rho=R)=0$, β_{ml} אם $\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\big|_{\rho=R}=0$;

e^{inz} הופך ל- $\sin\left(\frac{k\pi}{h}z\right)$ אם $\psi(z=h)=\psi(z=0)=0$ כאשר h- גובה הגליל.

הערכים העצמיים של הלפלסיאן הם:

$$\boxed{\nabla^2\psi_{lmn} = -\left[\left(\frac{\alpha_{ml}}{R}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{h}\right)^2\right]\psi_{lmn}}$$

כאשר $n=\frac{k\pi}{h}$.

בכדור

הפונקציות העצמיות של משוואת לפלס ($\nabla^2\psi=0$):

$$\boxed{\psi_{lm} = \begin{Bmatrix} r^l \\ r^{-l-1} \end{Bmatrix} Y_l^m(\theta,\varphi)}$$

עם הערכים העצמיים

$$D^2\psi_{lm} = -l(l+1)\psi_{lm}$$

הפונקציות העצמיות של משוואת הלמהולץ ($\nabla^2\psi+k^2\psi=0$):

$$\boxed{\psi_{lm} = j_l(kr)\, Y_l^m(\theta,\varphi)}$$

כאשר הערכים העצמיים הם $-k^2$ ושווים ל- $\left(\frac{X_{ml}}{R}\right)^2$ או $\left(\frac{Z_{ml}}{R}\right)^2$ בהתאם לתנאי השפה.

פתרון כללי

לפתרון הכללי צריך להוסיף מקדמים תלויי זמן $a(t)$ מפיתוח לטור:

בכדור:

$$P(r,\theta,\varphi,t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty} a_{lmn}(t)\, j_l(kr)\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

בעזרת האלגוריתם מחלק II.IV של הסכום מקבלים מד"ר עבור $a_{lmn}(t)$, ואז מקבלים עבורם פתרון שכולל קבוע ℓ_{lmn} אותו מקבלים מתנאי ההתחלה. דוגמה מלאה בעמוד הבא.

(*) משוואת הדיפוזיה בתוך כדור

$P(r,\theta,\varphi,t)$ היא צפיפות החומר בתוך כדור ברדיוס R. משוואת הדיפוזיה: $D\nabla^2 P = \frac{\partial}{\partial t}P$

חומר לא יוצא מהכדור ולכן $\frac{\partial P}{\partial r}\Big|_{r=R}=0$ וב-$t=t_0$ נתון: $P(t=t_0)=f(r,\theta,\varphi)$

מפתחים לטור:

$$1\quad P(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty} a_{lmn}(t)\, j_l\left({}^{*}\frac{Z_{ln}}{R}r\right)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

מציבים את הערכים העצמיים:

$$2\quad \nabla^2 P=-\left(\frac{Z_{ln}}{R}\right)^2$$

מקבלים מד"ר פשוטה:

$$3\quad \Rightarrow -\left(\frac{Z_{ln}}{R}\right)^2 D\, a_{lmn}(t)=\frac{d}{dt}a_{lmn}(t)$$

פותרים את המד"ר:

$$\Rightarrow a_{lmn}(t)=f_{lmn}\, e^{-\left[\frac{Z_{ln}^2}{R^2}D(t-t_0)\right]}$$

f_{lmn} יציג מפיתוח לטור של תנאי ההתחלה:

$$4\quad P(t=t_0)=f(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_{lmn}\, j_l\left(\frac{Z_{ln}}{R}r\right)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

את f_{lmn} מחלצים בעזרת תנאי האורתוגונליות:

$$\Rightarrow f_{lmn}=\frac{2}{R^3\left(1-l^2/\beta_{ln}^2\right)\left[j_l(\beta_{ln})\right]^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^R r^2dr\; f(r,\theta,\varphi)\, j_l\left(\frac{Z_{ln}}{R}r\right)Y_l^{m*}(\theta,\varphi)$$

ואז מציבים חזרה כדי לקבל את הפתרון המלא:

$$5\quad \Rightarrow P(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_{lmn}\, j_l\left(\frac{Z_{ln}}{R}r\right)Y_l^m(\theta,\varphi)\, e^{-\left[\frac{Z_{ln}^2 D}{R^2}(t-t_0)\right]}$$

IV פולינומי הרמיט

פולינומי הרמיט פותרים את האוסילטור ההרמוני: $\left(-\frac{d^2}{dx^2}+x^2\right)\psi(x)=\lambda\psi(x)$

מציבים $\psi(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}\phi(x)$ ומקבלים את משוואת הרמיט: $\boxed{\phi''(x)-2x\phi'(x)+2n\phi(x)=0}$

n הוא מס שלם אי-שלילי והפתרון הוא: $\phi(x)=H_n(x)$

הפונקציה היוצרת: $\boxed{g(x,t)=e^{-t^2+2xt}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}}$

נוסחת רודריגס: $\boxed{H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}}$

יחסי רקורסיה

1) $H_{n+1}=2xH_n-2nH_{n-1}$

2) $H_n'(x)=2nH_{n-1}$

3) $H_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}$

4) $H_{2n+1}(0)=0$

אורתוגונליות ונרמול

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)\,dx=2^n n!\sqrt{\pi}\,\delta_{n,m}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nH_n(x)\quad;\quad A_n=\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2}f(x)H_n(x)\,dx$$

האוסילטור התלת-מימדי

עבור האוסילטור החד-מימדי הערכים העצמיים הם $\lambda=-(1+2n)$.

האוסילטור התלת-מימדי הוא בעצם חיבור של שלושה אוסילטורים חד-מימדיים:

האוסילטור התלת-מימדי: 1 $[\nabla^2 - r^2]\psi(\vec r) = -\lambda\psi(\vec r)$

2 $$[\nabla^2-r^2]\psi(\vec r) = \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^3 x_i^2\right]\psi_x\psi_y\psi_z =$$
$$= \left[\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-x_i^2\right)\right] H_{nx}(x)H_{ny}(y)H_{nz}(z)e^{-\frac12 r^2}$$

כל $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-x_i^2\right)$ נותן $(1+2n_i)$ לערך העצמי, ולכן מקבלים:

3 $$\Rightarrow \left[\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-x_i^2\right)\right] H_{nx}(x)H_{ny}(y)H_{nz}(z)e^{-\frac12 r^2} = [-(1+2n_x)-(1+2n_y)-(1+2n_z)]\psi_x\psi_y\psi_z =$$
$$= -[3+2(n_x+n_y+n_z)]\psi_x\psi_y\psi_z$$

הגענו, אם כך, לתוצאה שהערכים העצמיים הם:

4 $$\Rightarrow \boxed{\lambda = 3+2(n_x+n_y+n_z)}$$

V קירובים אסימפטוטיים

I שיטת לפלס – מינימום בתוך הקטע

נעריך את האינטגרל $I(x)=\int_a^b e^{-x\phi(t)}f(t)\,dt$ בגבול $x\gg1$, כאשר הפונקציה $\phi(t)$

יש לה מינימום c בתוך הקטע $c\in[a,b]$, כך ש: $\phi'(c)=0,\ \phi''(c)>0$.

כמו כן צריך לבדוק ש- $f(c)\neq0$ ושההתנהגות של $f(t)$ מתונה יחסית ל- $e^{-x\phi(t)}$.

כיוון של- $\phi(t)$ יש רק מינימום ב-c, רוב התרומה לאינטגרל תגיע מסביבה צרה של אותה נקודה.

נבצע את הפתוח לשלבים:

1) מפתחים את $\phi(t)$ ו- $f(t)$ לטורים לפי טור טיילור, מסביב לנקודה c:

1 $$\phi(t) = \phi(c)+\phi'(c)(t-c)+\phi''(c)\frac{(t-c)^2}{2!}+\sum_{n=3}^{\infty} \phi^{(n)}(c)\frac{(t-c)^n}{n!}$$
$$\Rightarrow \phi(t)\approx\phi(c)+\phi''(c)\frac{z^2}{2}+\phi^{(3)}(c)\frac{z^3}{3!}+\phi^{(4)}(c)\frac{z^4}{4!}$$

נסתפק באיברים האלה, הם בדרך-כלל יספיקו. ביצענו החלפת משתנים $z=t-c$.

עבור $f(t)$ ניקח פחות איברים: $f(t)\approx f(c)+f'(c)z+f''(c)\frac{z^2}{2}$

2) אנחנו מפתחים את האינטגרל בסביבה קטנה ε סביב הנק' c: $\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}dt \Leftarrow \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}dz$.

2 $$I(x)\approx\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}dz\, e^{-x[\phi(c)+\phi''(c)\frac{z^2}{2}+\phi^{(3)}(c)\frac{z^3}{3!}+\phi^{(4)}(c)\frac{z^4}{4!}]}\left[f(c)+f'(c)z+f''(c)\frac{z^2}{2}\right]$$

3) עכשיו נתעסק קצת באקספוננט. קודם כל נשים לב ש- $e^{-x\phi(c)}$ הוא קבוע ולכן יוצא מהאינטגרל.

אח"כ נבודד את האיבר המוביל $e^{-x\phi''(c)\frac{z^2}{2}}$ שמתנהג כמו גאוסיאן (אנחנו אוהבים גאוסיאנים בפיזיקה) ואת שארית הטור נפתח שוב בטור טיילור של אקספוננט:

3 $$e^{-x[\phi^{(3)}(c)\frac{z^3}{3!}+\phi^{(4)}(c)\frac{z^4}{4!}]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\left[\frac{\phi^{(3)}(c)}{3!}z^3+\frac{\phi^{(4)}(c)}{4!}z^4\right]^n$$

בגלל שאקספוננט מפתחים כך: $e^{-f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}[f(x)]^n$

4) עכשיו אפשר להעביר את הגבולות לאינסוף: $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \to \int_{-\infty}^{\infty}$

$$\underline{4} \quad I(x) \cong \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\phi(c)}\, e^{-x\phi''(c)\frac{\tau^2}{2}} \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\left[\phi^{(3)}(c)\frac{\tau^3}{3!} + \phi^{(4)}(c)\frac{\tau^4}{4!}\right]^n\right\}\left\{f(c)+f'(c)\tau+f''(c)\frac{\tau^2}{2}\right\}d\tau$$

5) נבצע עוד החלפת משתנים כדי לפשט את החזקה של האקספוננט המוביל:

$$\underline{5} \quad y^2 = x\phi''(c)\tau^2 \Rightarrow y=\sqrt{x\phi''(c)}\,\tau, \quad d\tau = \frac{dy}{\sqrt{x\phi''(c)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{I(x) \cong \frac{e^{-x\phi(c)}}{\sqrt{x\phi''(c)}}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\frac12 y^2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\left[\frac{\phi^{(3)}(c)}{3!}\left(\frac{y}{\sqrt{x\phi''(c)}}\right)^3 + \frac{\phi^{(4)}(c)}{4!}\left(\frac{y}{\sqrt{x\phi''(c)}}\right)^4\right]^n\right\}\left\{f(c)+\frac{f'(c)y}{\sqrt{x\phi''(c)}}+\frac{f''(c)y^2}{2x\phi''(c)}\right\}}$$

6) עכשיו בוחרים עד איזה סדר לפתח. לפי בחירה זו כופלים את האיברים השונים של הסוכו"ם המוכפלים ואוספים את האיברים של הסדרים השונים של x.

מקבלים אוסף של אינטגרלים שפותרים בעזרת הנוסחה:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} y^n\, dy = 2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \\ &\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^n\, dt = n! \\ &\Gamma\left(n+\tfrac12\right) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{n-\frac12}\, dt = \frac{(2n)!}{n!\,4^n}\sqrt{\pi} \end{aligned}}$$

המשוואה המתקבלת בסוף היא משוואה סבוכה כדי לפתח את האינטגרל עד איזה סדר שרוצים.

בדרך-כלל לא מבקשים יותר מסדר I או II, ולכן יש נוסחאות סגורות:

קירוב סדר I (גאוסי):

$$\boxed{I(x) \cong \frac{e^{-x\phi(c)}}{\sqrt{x\phi''(c)}} f(c)\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\frac12 y^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{x\phi''(c)}}\, f(c)\, e^{-x\phi(c)}}$$

קירוב סדר II:

$$\boxed{I(x) \cong \sqrt{\frac{2\pi}{x\phi''(c)}}\, e^{-x\phi(c)}\left\{f(c)+\frac{1}{x}\left[\frac{f''(c)}{2\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi^{(4)}(c)}{8[\phi''(c)]^2} - \frac{f'(c)\phi^{(3)}(c)}{2[\phi''(c)]^2} - \frac{5f(c)[\phi^{(3)}(c)]^2}{24[\phi''(c)]^2}\right]\right\}}$$

7) <u>סיכום</u>:

א) מוצאים נק' מינימום ל- $\phi(t)$. מחשבים את: $f(c), f'(c), f''(c)$, $\phi(c), \phi''(c), \phi^{(3)}(c), \phi^{(4)}(c)$.

ב) בהתאם לסדר המבוקש מציבים לתוך הנוסחאות הסגורות.

ג) אם מבקשים סדר יותר גבוה, קופצים לסעיף $\underline{5}$.

II שיטת לפלס - מינימום בקצה הקטע

במקרה שלפונקציה $\phi(t)$ אין נק' מינימום בקטע $[a,b]$ נפתח את האינטגרל סביב אחת מנקודות הקצה a או b בהתאם לנק' בה יש ל- $\phi(t)$ מינימום לוקלי.

אם, למשל, מדובר בנק' a, נפתח את האינטגרל: $\int_a^b \to \int_0^\infty$

חוזרים על אותם שלבים מהשיטה הקודמת, אלא שעכשיו מפתחים את $\phi(t)$ ו- $f(t)$ טיילורים סביב הנקודה a.

עבור סדר II יש נוסחה סגורה:

$$\boxed{I(x) \cong \frac{e^{-x\phi(a)}}{x\phi'(a)}\left\{f(a) + \frac{1}{x}\left[\frac{f'(a)}{\phi'(a)} - \frac{f(a)\phi''(a)}{[\phi'(a)]^2}\right]\right\}}$$

III נוסחאות ופיתוחי טיילור שימושיים

$$I_n(\alpha) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\alpha^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad , \alpha>0$$

$$I_1(\alpha) \equiv \int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2\alpha}$$

$$I_0(\alpha) \equiv \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$I_{2n}(\alpha) \equiv \int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2}dx = \left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n I_0(\alpha)$$

$$I_{2n+1}(\alpha) \equiv \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\alpha x^2}dx = \left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n I_1(\alpha)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{x^7}{315} + \dots$$

IV קירוב אסימפטוטי של מד"רים

הפיתוח הבא תקף למשוואות מסוג "מקולקלות". נביט על המשוואה שמופיעה

בתרגיל 9, שאלה 1: $\left[x^2\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} + x^2 - 6\right]y(x) = 0$

1) מנחשים את הפתרון:

1 $\boxed{y(x) = x^c f(x)}$

$$\Rightarrow y'(x) = cx^{c-1}f(x) + x^c f'(x)$$

$$y''(x) = c(c-1)x^{c-2}f(x) + 2cx^{c-1}f'(x) + x^c f''(x)$$

מציבים חזרה: $\Rightarrow \left\{x^2\frac{d^2}{dx^2} + x(2c+2)\frac{d}{dx} + [c(c-1) + 2c + x^2 - 6]\right\}f(x) = 0$

2) עכשיו מוצאים את c שיאפס את הנגזרת הראשונה. במקרה שלנו:

2 $c = -1$

$$\Rightarrow \left\{x^2\frac{d^2}{dx^2} + (x^2-6)\right\}f(x) = 0$$

3) מנחשים פתרון נוסף, מסוג פרובניוס:

3 $\boxed{f(x) = e^{ix}\sum_{n=0}^\infty a_n x^{-n}}$

$$f'(x) = ie^{ix}\sum a_n x^{-n} + e^{ix}\sum(-n)a_n x^{-(n+1)}$$

$$f''(x) = -e^{ix}\sum a_n x^{-n} - 2ie^{ix}\sum n a_n x^{-(n+1)} + e^{ix}\sum n(n+1)a_n x^{-(n+2)}$$

מציבים חזרה למד"ר:

$$\Rightarrow e^{ix}[-2inx + n(n+1) - 6]\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} = 0$$

4) עכשיו בודקים מה קורה עבור ערכים שונים של n. כל ערך של n מצמיד את הגורם a_n בפיתוח שנקבל, כאשר כל a_n הוא מקדם של הסדר המתאים ב-$\frac{1}{x^n}$. הפיתוח במלואו, בסופו של דבר, ייראה כך:

$$\boxed{y(x) = e^{ix}x^c\left[a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots\right]}$$

אם הפיתוח <u>מפסיק</u> הטור לא ימשיך עד אינסוף, אלא יקטע את עצמו. אם לא, אז בשאלה עצמה יבקשו לפתח עד סדר מסוים. נמשיך בדוגמה שלנו:

4 $n=0$: $[-6a_0] = -6a_0$

$n=1$: $[-2ix + 2 - 6]\frac{a_1}{x} = -2ia_1 - 4\frac{a_1}{x}$

$n=2$: $[-4ix + 6 - 6]\frac{a_2}{x^2} = -\frac{4ia_2}{x^2}$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{e^{ix}}{x}\left[-6a_0 - 2ia_1 - \frac{4a_1}{x} - \frac{4ia_2}{x^2}\right] = 0$$

איפוס הסוגריים "תן לנו" את היחסים בין המקדמים ואת a_0 נקבע שרירותית:

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_2 &= ia_1 \\ a_1 &= 3ia_0 \\ a_0 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 3i \\ a_2 &= -3 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{y_\pm(x) = \frac{e^{\pm ix}}{x}\left[1 \pm \frac{3i}{x} - \frac{3}{x^2}\right]}$$

5) כיוון שהמד"ר מסדר שני צריכים להיות לה שני פתרונות בלתי-תלויים. במקרה שלנו זה פשוט - הפתרון השני יהיה הצמוד של הראשון - בכל מקום שיש i פשוט מוסיפים ±.

VI חשבון וריאציות

בחשבון וריאציות מתעסקים בפונקציונלים, שהם יצורים מתמטיים שלוקחים פונקציה ונותנים מספר. למשל, אינטגרלים מסוימים או נגזרות בנקודה. כמו כן, נעסוק בוריאציה - כמו שיש דיפרנציאל dy עבור פונקציות, כך יש וריאציה δF עבור פונקציונלים. באלגוריתם שמיועד לחשב הוריאציה של פונקציונל מסוים ניתן לפנות לסיכום באנליטית.

I <u>משתנה תלוי יחיד, משתנה בלתי-תלוי יחיד</u>

המקרה הפשוט ביותר: יש לנו פונקציונל I שמורכב מפונקציה של המשתנה התלוי y ונגזרת y', כש-y תלוי רק במשתנה בלתי-תלוי אחד x:

$$\boxed{I = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\,dx}$$

משוואת EL עבור מקרה זה:

$$\frac{\delta F}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

ישנה משפחה שלמה של פונקציות כאלה, בהתאם לתלות ב- x,y',y:

$$\boxed{\begin{array}{lll}
1)\ F(y,y',x) & : & \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \\
2)\ F(y,x) & : & \frac{\partial F}{\partial y}=0 \Rightarrow F(y,x)=const \Rightarrow \text{אין פתרון} \\
\multicolumn{3}{l}{\text{בכל הבעיות חייבים לבדוק את תנאי השפה (קצוות סגורים: } y(a)=y_a,\ y(b)=y_b)} \\
3)\ F(y') & : & \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=0 \Rightarrow y=c_1x+c_2 \\
4)\ F(y',x) & : & \frac{\partial F}{\partial y'}=c \Rightarrow y'=f(x) \Rightarrow y=\int f(x)dx \\
5)\ F(y,y') & : & \frac{\partial F}{\partial y'}y'-F=c \Rightarrow y'=f(y) \Rightarrow dx=\frac{dy}{f(y)} \\
6)\ F(y,y',y'',x) & : & \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)
\end{array}}$$

II מספר משתנים תלויים, משתנה ב"ת יחיד

הפעם יש לנו אוסף של פונקציות y, וכולן תלויות רק ב-x:

הפונקציה בתוך הפונקציונל: $\boxed{F[y_1(x),\cdots,y_n(x),\ \dot y_1(x),\cdots,\dot y_n(x),x]}$

לכל אחת מהפונקציות $y_i(x)$ נפתח משוואת EL נפרדת, בהתאם למשפחת הפונקציות מהסעיף הקודם. נסתכל על דוגמה של חלקיק חופשי במישור x-y:

*) $T=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2)=\frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2)$

הפעולה היא אינטגרל בזמן של הלגרנז'יאן: 1. $S=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(\rho,\dot\rho,\dot\varphi,t)dt$

כאשר במקרה שלנו הלגרנז'יאן הוא רק האנרגיה הקינטית.

2. $EL(\rho)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho}\right)=m\rho\dot\varphi^2-m\ddot\rho=0$

$EL(\varphi)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}\right)=m\rho^2\ddot\varphi=0$

III משתנה תלוי יחיד, מס' משתנים ב"ת

הפעם יש לנו רק y אחת, אבל היא תלויה ב-n משתנים ב"ת x_i:

הפונקציה בתוך הפונקציונל: $\boxed{I=\int\cdots\int F[y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial y}{\partial x_n},x_1,\cdots,x_n]dx_1\cdots dx_n}$

נקבל משוואת EL שמורכבת מכל המשתנים: $\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial(\frac{\partial y}{\partial x_i})}\right)=0}$

זה בעיקר רלוונטי למשוואות בכמה מימדים, כמו כל המשוואות שלנו.

כדוגמה נסתכל על:

*) $\left.\begin{array}{l}E_k=\frac{1}{2}\mu\int d\bar x\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}(\bar x,t)\right]^2 \\ E_p=\frac{1}{2}k\int d\bar x\left[\bar\nabla\phi(\bar x,t)\right]^2\end{array}\right\}L=E_k-E_p$

1. $I=\int Ldt=\int dt\,d\bar x\left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}k(\nabla\phi)^2\right]$

הפונקציונל תלוי רק בנגזרות של ϕ (לפי זמן ולפי מקום) ולכן נתייחס רק לחלק השני (הסכום) במשוואת EL נציין ש-$\bar x$ הוא תלת-מימדי:

2. $\frac{\delta I}{\delta\phi}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi}\right)-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\phi}{\partial x_i})}\right)=-\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+k\nabla^2\phi$

IV כופלי לגרנג'

כופלי לגרנג' נכנסים כשיש לנו אילוצים במערכת. אילוצים מגיעים בשני סוגים:

1) <u>אילוצים מהצורה</u>: $\boxed{\phi(y_i, y_i', x) = const}$

את הפונקציונל שלנו הוא $I = \int F(y_i, y_i', x)\,dx$ אז מגדירים F חדש: $\boxed{F^* = F + \lambda(x)\phi}$

ופותרים משוואות EL עבור F^*. נשים לב ש-λ היא פונקציה של x.

2) <u>אילוצים מהצורה</u>: $\boxed{\phi = \int \varphi(y_i, y_i', x)\,dx = const}$

גם כאן בונים פונקציה חדשה: $\boxed{F^* = F + \lambda\varphi}$ ופותרים משוואות EL עבור F^*.

נשים לב שהפעם λ הוא מספר, ולא פונקציה.

* עבור שני סוגי האילוצים, בנוסף למשוואות EL שמקבלים, משתמשים גם במשוואת האילוץ.

נשים לב שהקבוע const בא לידי ביטוי <u>רק</u> <u>במשוואת האילוץ</u>, ולא משפיע כלל על משוואות EL, היות והוא נופל בגזירה.

*) <u>משוואת שרדינגר</u>

ניקח את ההמילטוניאן הכללי ביותר:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$$

נמצא מינימום לאנרגיה:

$$1 \quad \langle E \rangle = \langle \psi | H | \psi \rangle = \int \psi^*(\vec{r})\, H\, \psi(\vec{r})\, d\vec{r}$$

תחת האילוץ ההסתברותי של פונקציית הגל:

$$\int \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\, d\vec{r} = 1 \equiv \int \varphi\, d\vec{r}$$

נשים לב שמתייחסים ל-ψ ול-ψ^* כאל שני משתנים נפרדים.

לאחר אינטגרציה בחלקים של $\langle E \rangle$:

$$2 \quad E = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi^* \vec{\nabla}\psi + V\psi^*\psi\right) d\vec{r}$$

$$3 \quad E^* = E - \lambda\varphi = \int \left[\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi^* \vec{\nabla}\psi + V\psi^*\psi - \lambda\psi^*\psi\right] d\vec{r}$$

$$4 \quad EL(\psi^*) = \frac{\partial E^*}{\partial \psi^*} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial E^*}{\partial\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_i}\right)}\right] = (V-\lambda)\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = \lambda\psi$$

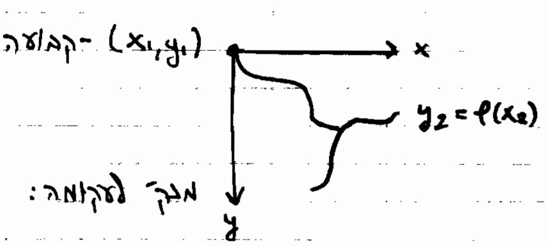
וכך קיבלנו את משוואת שרדינגר, כאשר λ היא האנרגיה העצמית.

V <u>בעיות עם תנאי קצה חופשיים</u>

את סעיפים I-III הגדרנו על סמך ההנחה שנקודות הקצה והערכים שלהן <u>קבועים</u>.

אם חלק מנקודות הקצה אינן קבועות, צריך להוסיף לפתרון תנאים נוספים:

y_i חופשי	$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right\|_{x_i} = 0$
x_i חופשי	$\left.\left(F - \frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\|_{x_i} = 0$
$y_i = \varphi(x_i)$	$\left[F + (\varphi' - y')\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x_i} = 0$



יציבות פתרונות

כל שאלה שבדרך-כלל מצטמצמת לשאלות על פונקציונלים. בעזרת משוואות EL אנחנו יודעים למצוא נקודות אקסטרמום לפונקציונל. כדי לזהות איזו מהנקודות היא נקודת מינימום, בודקים את יציבות הפתרונות. פתרון יציב, כמו נקודות מינימום של פוטנציאלים, הוא פתרון שסטייה קטנה ממנו לא תגדל עם הזמן. כלומר, אם יש לנו נקודות ϕ_{0j} ואנחנו נזים לנקודות קרובות $\phi_j=\phi_{0j}+\delta\phi_j$, אזי מתקיים $|\delta\phi_j|\ll 1$ עבור הפתרונות היציבים.

בדיקת יציבות

נתאר אלגוריתם פתרון ונדגים אותו, בו-זמנית.

1) מוצאים את משוואות EL של הפונקציונל ואת הקבועים ϕ_{0j} שמקיימים אותן.

$$\underline{1}\quad \mathcal{L}=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}k(\bar\nabla\phi)^2-\frac{1}{3}\phi^3-\frac{1}{6}\phi^6$$

$$EL(\phi)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}-\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)}\right)=0$$

$$EL(\phi)=-\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+k\nabla^2\phi-\phi^2-\phi^5=-\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+k\nabla^2\phi-\phi^2(1+\phi^3)=0$$

קל לראות שהקבועים $\phi_0=0,-1$ מקיימים את $EL(\phi)$.

2) מהמשתנה ϕ עוברים לעבוד עם המשתנה המוזז $\phi=\phi_0+\delta\phi$

$$\underline{2}\quad \boxed{\phi(\bar r)=\phi_0+\delta\phi(\bar r)}\ ,\quad |\delta\phi(\bar r)|\ll 1$$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\mu\left[\frac{\partial}{\partial t}(\phi_0+\delta\phi)\right]^2-\frac{1}{2}k\left[\bar\nabla(\phi_0+\delta\phi)\right]^2-\frac{(\phi_0+\delta\phi)^3}{3}-\frac{(\phi_0+\delta\phi)^6}{6}$$

כיוון ש- $|\delta\phi|\ll 1$ נשמור רק איברים מסדר I ומסדר II ב- $\delta\phi$.

$$\mathcal{L}\cong\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\delta\phi}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}k(\bar\nabla\delta\phi)^2-\frac{\phi_0^3}{3}-\frac{3\phi_0^2\delta\phi}{3}-\frac{3\phi_0\delta\phi^2}{3}-\frac{\phi_0^6}{6}-\frac{6\phi_0^5\delta\phi}{6}-\binom{6}{2}\frac{\phi_0^4\delta\phi^2}{6}$$

$$EL(\delta\phi)=-\mu\frac{\partial^2\delta\phi}{\partial t^2}+k\nabla^2\delta\phi-\phi_0^2-2\phi_0\delta\phi-\phi_0^5-5\phi_0^4\delta\phi=0$$

נשים לב שהאיבר $-\phi_0^2(1+\phi_0^3)=0$ נכון כי כך מצאנו את $\phi_0=0,-1$, ולכן:

$$EL(\delta\phi)=-\mu\frac{\partial^2\delta\phi}{\partial t^2}+k\nabla^2\delta\phi-(2\phi_0+5\phi_0^4)\delta\phi=0$$

3) נעשה עכשיו טרנספורם פורייה מ- $\delta\phi$ ל- $\delta\hat\phi$, ולפי:

$$\boxed{\frac{d^n}{dx^n}f(x)=(ik)^n\hat f(k)}$$

ולפי: נזכור: $\varepsilon\ll 1$

$$\boxed{\delta\phi(\bar r,t)=\varepsilon\int\delta\hat\phi(\bar p,t)e^{-i(\bar p\cdot\bar r-\omega_p t)}d\bar p}$$

$$\underline{3}\quad \widehat{EL}(\delta\hat\phi)=\left[\mu\omega_p^2-kp^2-(2\phi_0+5\phi_0^4)\right]\delta\hat\phi=0$$

4) עכשיו בודקים את הפתרונות $\phi_0=0,-1$:

$$\underline{4}\quad \phi_0=0:\ \widehat{EL}(\delta\hat\phi)=(\mu\omega_p^2-kp^2)\delta\hat\phi=0$$

אם מציבים למצב הזה, בו אין לנו איזשהו קבוע בסוגריים. אלו רק את האיברים שמתקבלים מהנגזרות, זה אומר ש- $\delta\hat\phi$ יכול להיות פונקציה שמתפתחת עם הזמן: $\delta\hat\phi=at+b$, ולכן הפתרון לא יציב.

$\phi_0 = -1 : \ EL(\delta\hat{\phi}) = (\mu\omega_p^2 - kp^2 - 3)\delta\hat{\phi} = 0$

עכשיו הבדיקה היחידה שהשוואה הזו מתקיימת היא אם $\delta\hat{\phi} = 0$, ולכן הפתרון יציב.

<u>סיכום</u>

לאחר לינאריזציה הפונ"ה נקבל ביטוי שנראה כך: $EL(\delta\hat{\phi}) = (\mu\omega_p^2 - kp^2 - a)\delta\hat{\phi} = 0$

נבדוק ש- ω_p מ"צג לנו תדירות של אוסילטור: $\omega_p^2 = \frac{1}{\mu}(kp^2 + a)$

אם $a > 0$ אין בעיה, נקבל אוסילטור יציב ⇐ פתרון יציב.

אם $a \leq 0$ נקבל פתרון שגדל עם הזמן לינארית ($a=0$) או תדירות מדומה ($a<0$) ⇐ לא יצ